Quelques corrigés

Exercice 1

Déterminer la nature des séries suivantes :

2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n^2-2}{n^3}$

On a besoin des résultats sur les séries de Riemann, $\displaystyle\frac{n^2-2}{n^3}=\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}$

on voit alors que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n^2-2}{n^3}$ est la combinaison linéaire de deux séries de Riemann, une divergente $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ et une convergente $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^3}$, donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n^2-2}{n^3}$ est divergente

Exercice 3

Pour n entier tel que $n\geqslant 2$, on pose $u_n=\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$

1. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n$, peut-on conclure sur la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}u_n$?

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}1-\frac{1}{n}=1$

donc par continuité du logarithme, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)=\ln(1)=0$ i.e. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=0$

2. Pour $n\geqslant 2$, mettre $1-\dfrac{1}{n}$ sous forme d'une fraction, puis transformer l'expression de u_n

$$u_n=\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)=\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)=\ln(n-1)-\ln(n)$$

3. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}u_n$ est divergente et calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=2}^{n}u_k$

Indication : on devra reconnaitre une série très particulière.

d'après la question **2.** $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}u_k=\sum_{k=2}^{n}(\ln(k-1)-\ln(k))=\ln(1)-\ln(n)=-\ln(n)$ par télescopage

or $\ln(n)\to+\infty$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=2}^{n}(\ln(k-1)-\ln(k))=-\infty$

donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$ i.e. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}u_n$ diverge vers $-\infty$

Nota bene : il s'agit donc d'un cas où $u_n\to 0$ mais la série $\sum u_n$ ne converge pas.

Exercice 4

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$

On note S_n la somme partielle d'indice n de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$

1. Déterminer les réels a, b et c tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{n+2}$

On part du terme le plus « compliqué » et on effectue une réduction au même dénominateur :

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2} = \frac{a(n+1)(n+2) + bn(n+2) + cn(n+1)}{n(n+1)(n+2)}$$
$$= \frac{a(n^2+3n+2) + b(n^2+2n) + c(n^2+n)}{n(n+1)(n+2)} = \frac{(a+b+c)n^2 + (3a+2b+c)n + 2a}{n(n+1)(n+2)}$$

pour réaliser l'égalité avec u_n on peut identifier les coefficients du polynôme en n de chaque numérateur, on obtient alors $2a = 1, 3a + 2b + c = 0$ et $a + b + c = 0$

donc $a = \dfrac{1}{2}$ et $\begin{cases} b + c & = -\dfrac{1}{2} \\ 2b + c & = -\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c & = -\dfrac{1}{2} - b \\ b & = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c & = \dfrac{1}{2} \\ b & = -1 \end{cases}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'expression de S_n en fonction de n, en utilisant des télescopages.

Soit $n \in \mathbb{N}$, alors grâce à la question précédente, on peut écrire :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{k+2} \right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{k+1} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{k+2} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} \right)$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{2} \right)$$ par télescopages donc $S_n = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} \left(\dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+1} \right)$

3. En déduire que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ est convergente, et calculer sa somme.

$\dfrac{1}{n+1} \to 0$ et $\dfrac{1}{n+2} \to 0$ donc $S_n \to \dfrac{1}{4}$

donc $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ est convergente et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = \dfrac{1}{4}$

Exercice 6

Soit $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites telles que : $\forall n\in\mathbb{N}, 0\leqslant v_n\leqslant u_n$

1. **a.** On suppose que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ est elle aussi convergente.

cf. cours.

Le résultat ainsi démontré est encore valable pour des séries qui ne commencent qu'au rang 1, ou 2, ou 3...etc.

b. En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n^2\ln(n)}$ est convergente.

2. **a.** On suppose que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ est divergente. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est divergente, vers $+\infty$.

cf. cours.

Le résultat ainsi démontré est encore valable pour des séries qui ne commencent qu'au rang 1, ou 2, ou 3...etc.

b. En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 3} \dfrac{\ln(n)}{n}$ est divergente.

Pour $n\geqslant 3, \ln(n)\geqslant\ln(3)$, (car ln est croissante) donc $\ln(n)\geqslant 1$ car $\ln(3)\geqslant 1$ et donc $\dfrac{\ln(n)}{n}\geqslant\dfrac{1}{n}$

donc pour $n\geqslant 3, \sum\limits_{k=3}^{n}\dfrac{\ln(k)}{k}\geqslant\sum\limits_{k=3}^{n}\dfrac{1}{k}$

or en utilisant le résultat sur les séries de Riemann, en particulier la série harmonique, $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n}$ diverge vers $+\infty$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 3}\dfrac{1}{n}$ diverge vers $+\infty$

et il s'agit d'une série à termes positifs donc $\sum\limits_{n\geqslant 3}\dfrac{1}{n}$ n'est pas majorée et donc d'après l'inégalité démontrée précédemment, la série $\sum\limits_{n\geqslant 3}\dfrac{\ln(n)}{n}$ n'est pas majorée non plus

or elle est à termes positifs, donc elle diverge vers $+\infty$

c. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 3}\dfrac{1}{n-1+(-1)^n e^{-n}}$ est divergente.

soit $n\geqslant 3$, alors $-1\leqslant(-1)^n\leqslant 1$ et donc $-e^{-n}\leqslant(-1)^n e^{-n}\leqslant e^{-n}$ (car $e^{-n}\geqslant 0$)
comme a fortiori $n>0$, alors $e^{-n}<1$, donc $-1\leqslant(-1)^n e^{-n}\leqslant 1$,
donc $n-2\leqslant n-1+(-1)^n e^{-n}\leqslant n$, donc $0<n-1+(-1)^n e^{-n}\leqslant n$
et donc $\dfrac{1}{n-1+(-1)^n e^{-n}}\geqslant\dfrac{1}{n}$ car la fonction inverse est décroissante sur $]0,+\infty[$
puis on conclut comme au **b.** en comparant à la série harmonique.

Séries usuelles

Exercice 8

Cet exercice vise à démontrer la convergence des séries géométriques dérivée et dérivée seconde et à calculer leurs sommes.

Soit q un nombre réel tel que $|q| < 1$.

1. Soit p un entier, avec $p \geqslant 2$.

a. Justifier que la série $\sum_{n \geqslant p} q^n$ est convergente.

Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $n \geqslant p$, alors $\sum_{k=p}^{n} q^k = \dfrac{q^p - q^{n+1}}{1-q}$ et $|q| < 1 \Rightarrow q^n \to 0$

donc $\dfrac{q^p - q^{n+1}}{1-q} \to \dfrac{q^p}{1-q}$ et donc $\sum_{n \geqslant p} q^n$ converge et $\sum_{k=p}^{+\infty} q^k = \dfrac{q^p}{1-q}$

b. Calculer la somme de cette série. cf. ci-dessus

2. a. Justifier que la série $\sum_{n \geqslant 1} nq^n$ est convergente.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour $x \in]-1;1[$, on pose $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$

alors $f(x) = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1-x}$ (somme des termes d'une suite géométrique)

par ailleurs f est dérivable et d'une part $f'(x) = \sum_{k=0}^{n} kx^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$ et d'autre part,

$$f'(x) = \frac{(-(n+1)x^n)(1-x) - (1-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2} = \frac{-(n+1)x^n + (n+1)x^{n+1} + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \dfrac{-(n+1)x^n + nx^{n+1} + 1}{(1-x)^2}$

or (comme $|x| < 1$) par croissance comparée $nx^n \to 0$ donc $(n+1)x^n \to 0$ et $nx^{n+1} \to 0$

donc $\dfrac{-(n+1)x^n + nx^{n+1} + 1}{(1-x)^2} \to \dfrac{1}{(1-x)^2}$, de fait $\sum_{n \geqslant 1} nx^{n-1}$ converge

et donc $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$, de fait par opération $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \dfrac{x}{(1-x)^2}$

b. Calculer la somme de cette série.cf. ci-dessus

3. a. Justifier que la série $\sum_{n \geqslant 1} n^2 q^n$ est convergente.

On poursuit avec $f(x)$ défini plus haut, alors d'une part $f''(x) = \sum_{k=1}^{n} k(k-1)x^{k-2}$

$$\text{d'autre part } f''(x) = \frac{(-n(n+1)x^{n-1} + n(n+1)x^n)(1-x)^2 - ((n+1)x^n + nx^{n+1} + 1)(-2(1-x))}{(1-x)^4}$$
$$= \frac{(-n(n+1)x^{n-1} + n(n+1)x^n)(1-x) + 2((n+1)x^n + nx^{n+1} + 1)}{(1-x)^3}$$

on peut simplifier un peu, mais aussi voir qu'au numérateur, à part le 2, tous les termes tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$

donc $\sum_{n \geqslant 1} n(n-1)x^{n-2}$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \dfrac{2}{(1-x)^3}$

b. Calculer la somme de cette série.

Pour $n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{n} k^2 q^k = \sum_{k=1}^{n} k(k-1)q^k + \sum_{k=1}^{n} kq^k = q^2 \sum_{k=1}^{n} k(k-1)q^{k-2} + \sum_{k=1}^{n} kq^k$
donc par opération sur les sommes de séries convergentes, d'après les résultats de la question précédente et de la question **2.** :
$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 q^n = q^2 \times \frac{2}{(1-q)^3} + \frac{q}{(1-q)^2} = \frac{2q^2 + q(1-q)}{(1-q)^3} = \frac{q^2+q}{(1-q)^3}$

Exercice 9

Justifier que la série suivante est convergente, et calculer sa somme.

7. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^2 + (-1)^n}{3^n}$

On sépare les sommes, d'une part $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{3^n}$ converge (car $\frac{(-1)^n}{3^n} = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ et $\left(\left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3} < 1\right)$)
et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} - 1 = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$
d'autre part
pour $n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{3^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k-1)+k}{3^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k-1)}{3^k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3^k} = \frac{1}{3^2} \sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)}{3^{k-2}} + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3^{k-1}}$
on reconnait deux séries géométriques (dérivée seconde et dérivée) convergentes ($|q| = \frac{1}{3} < 1$) et
$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{3^{n-2}} = \frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3} = \frac{2 \times 3^3}{2^3} = \frac{3^3}{2^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^{n-1}} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{3^2}{2^2}$
donc $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^2}{3^n}$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{3^n} = \frac{1}{3^2} \times \frac{3^3}{2^2} + \frac{1}{3} \times \frac{3^2}{2^2} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$
donc $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^2+(-1)^n}{3^n}$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+(-1)^n}{3^n} = \frac{6}{4} - \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

9. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2(-1)^n}{4^n}$

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2(-1)^n}{4^n} = \sum_{n\geqslant 0} n^2 \left(-\frac{1}{4}\right)^n = \sum_{n\geqslant 0} (n(n-1)+n) \left(-\frac{1}{4}\right)^n = \sum_{n\geqslant 0} n(n-1) \left(-\frac{1}{4}\right)^n + \sum_{n\geqslant 0} n \left(-\frac{1}{4}\right)^n$$
$$= \sum_{n\geqslant 2} n(n-1) \left(-\frac{1}{4}\right)^n + \sum_{n\geqslant 1} n \left(-\frac{1}{4}\right)^n = \left(-\frac{1}{4}\right)^2 \sum_{n\geqslant 2} n(n-1) \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-2} - \frac{1}{4} \sum_{n\geqslant 1} n \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$
donc $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2(-1)^n}{4^n}$ converge (comme combinaison linéaire de séries convergentes) et
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2(-1)^n}{4^n} = \left(-\frac{1}{4}\right)^2 \times \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-2} - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$
$$= \left(-\frac{1}{4}\right)^2 \times \frac{2}{\left(1-\left(-\frac{1}{4}\right)\right)^3} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{\left(1-\left(-\frac{1}{4}\right)\right)^2} = \left(-\frac{1}{4}\right)^2 \times \frac{2}{\left(\frac{5}{4}\right)^3} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{\left(\frac{5}{4}\right)^2}$$
$$= \left(-\frac{1}{4}\right)^2 \times \frac{2 \times 4^3}{5^3} - \frac{1}{4} \times \frac{4^2}{5^2} = \frac{2 \times 4}{125} - \frac{4}{25} = \frac{8}{125} - \frac{20}{125} = -\frac{12}{125}$$