Visez la qualité : $0+0+0+0<0,5$ Sans calculatrice
Bon devoir !

Exercice 1 - vrai ou faux

Indiquer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses en justifiant la réponse.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)^3}{x^2} = 0$

b) Soit la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{\ln(1+x)} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$ alors f est continue sur $\mathbb{R}$

c) Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, alors A est inversible

d) La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{n^2-5}{n^3+6}$ est grossièrement divergente.

e) La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{9^n}{11}$ est divergente.

Exercice 2 - limites de fonctions et séries

1. Déterminer les limites suivantes

a. $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x^2-2x-8}{x+2}$ **b.** $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{4\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)}{x}$

2. Déterminer si les séries suivantes sont convergentes et si oui calculer leur(s) somme(s)

a. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \left(e^{-n} - e^{-n-1}\right)$ **b.** $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n}{7^n}$

Exercice 3 - matrice et suites

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$

2. On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0 = 2, b_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = 2a_n + 3^n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = 3b_n + 3^n$$

a. Compléter le programme ci-contre pour qu'il affiche la valeur de a_n

```
a=2
for i in range(...,...):
  a=...
print(...)
```

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ 3^n \end{pmatrix}$

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$

c. Etablir que $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$

d. En déduire en utilisant **1.** que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 2^n + 3^n$ et $b_n = n3^{n-1}$ puis déterminer les limites des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Problème 1

On considère la fonction $f :]0,+\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $]0,+\infty[$, par :

$$f(x)=\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}\ln(x)$$

On admet les encadrements numériques suivants :

$$2,7<\mathrm{e}<2,8 \quad 7,3<\mathrm{e}^{2}<7,4 \quad 0,6<\ln(2)<0,7$$

Partie I : étude de la fonction f

1. Justifier que f est dérivable 2 fois sur $]0,+\infty[$ et calculer, pour tout x de $]0,+\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$
2. Dresser le tableau de variations de f' avec la limite de f' en 0 et la limite de f' en $+\infty$ et préciser $f'(1)$
3. Dresser le tableau de variations de f avec la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$ et préciser $f(1)$
4. Donner l'allure de la courbe représentative de f
5. Étudier les variations de la fonction $u :]0,+\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $u(x)=f'(x)-x$
6. En déduire que l'équation $f'(x)=x$, d'inconnue $x \in]0,+\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et montrer : $1<\alpha<2$
7. Ecrire un programme Python qui permet de déterminer une valeur approchée de α à 10^{-5} près.

Partie II : étude d'une suite, étude d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0=2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}=f(u_n) \end{array}\right.$$

1. Ecrire un programme Python permettant de calculer et de représenter graphiquement les 100premiers termes de la suite (u_n)
2. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n \geqslant 2$
3. Etudier les variations, puis le signe, de la fonction $g : \begin{array}{ccc} [2,+\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)-x \end{array}$
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
5. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $+\infty$ pour limite.
6. Avec Python, définir une fonction qui, pour un réel A, renvoie le premier entier naturel N tel que $u_N \geqslant A$
7. Démontrer : $\forall x \in \left[2,+\infty\right[, 2\ln(x) \leqslant x \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{3}$
8. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geqslant \dfrac{6-\mathrm{e}}{2} u_n$
9. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 2\left(\dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^{n}$, puis retrouver le résultat de la question **5.**.
10. Justifier que que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0}\left(\frac{2}{6-\mathrm{e}}\right)^{n}$ converge.
11. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{u_n}$ converge.

Problème 2

Partie A - puissances d'une matrice

On définit les matrices $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $Q = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

1. Calculer PQ, que peut-on en déduire ?

2. On définit la matrice D par $D = P^{-1}MP$
Déterminer la matrice D

3. Montrer que $M = PDP^{-1}$

4. Montrer que, pour tout entier naturel $n, M^n = PD^nP^{-1}$

5. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer D^n

6. Déterminer, pour tout entier naturel n, la première colonne de la matrice M^n

Partie B - étude d'une expérience aléatoire

On dispose de trois urnes :

- l'urne 1 contient trois boules numérotées de 1 à 3
- l'urne 2 contient deux boules numérotées 1 et une boule portant le numéro 2
- l'urne 3 contient deux boules numérotées 1 et une boule portant le numéro 3

On effectue des tirages successifs avec remise d'une boule dans ces urnes selon le protocole suivant :

- le premier tirage s'effectue dans l'urne 1
- à l'issue de chaque tirage, on décide de faire le tirage suivant dans l'urne portant le numéro de la boule tirée. Ainsi, si la boule tirée au troisième tirage porte le numéro 2, alors le quatrième tirage se fait dans l'urne 2.

On définit, pour chaque entier $k \geqslant 1$, les événements suivants :

▷ A_k : « le $k^{\text{ème}}$ tirage amène une boule portant le numéro 1 »
▷ B_k : « le $k^{\text{ème}}$ tirage amène une boule portant le numéro 2 »
▷ C_k : « le $k^{\text{ème}}$ tirage amène une boule portant le numéro 3 »

Et on note, pour chaque entier $k \geqslant 1, a_k = P(A_k), b_k = P(B_k)$ et $c_k = P(C_k)$

1. **a.** Déterminer, en justifiant, les valeurs des probabilités a_1, b_1 et c_1

b. Déterminer la valeur de b_2, en justifiant.

c. A l'issue du deuxième tirage, on constate que la boule tirée porte le numéro 2. Déterminer la probabilité que le premier tirage ait amené la boule numéro 2.

2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note U_k la matrice-colonne suivante : $\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix}$

a. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, donner en les justifiant les probabilités $P_{A_k}(A_{k+1}), P_{B_k}(A_{k+1})$ et $P_{C_k}(A_{k+1})$
En déduire que $a_{k+1} = \frac{1}{3}a_k + \frac{2}{3}b_k + \frac{2}{3}c_k$

b. De la même manière, déterminer, pour $k \in \mathbb{N}^*$, les expressions de b_{k+1} et c_{k+1} en fonction de a_k, b_k et c_k

c. Déterminer la matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, telle que, pour tout entier naturel k non nul, $U_{k+1} = AU_k$

3. On pose $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

a. Vérifier que $U_1 = AU_0$

b. Montrer alors que pour tout k de $\mathbb{N}$, on a $U_k = A^k U_0$

c. Vérifier que $A = M + \dfrac{1}{3} I_3$

d. Montrer par récurrence que, pour tout k de $\mathbb{N}$, $A^k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j$

4. **a.** Simplifier en fonction de k les sommes $S_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{2}{3}\right)^{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j}$ et $T_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(-\frac{2}{3}\right)^{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j}$

b. En déduire les 3 éléments de la première colonne de la matrice A^k

c. Vérifier alors que pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a $a_k = \dfrac{1}{2}\left(1 + \left(-\dfrac{1}{3}\right)^k\right)$ et $b_k = c_k = \dfrac{1}{4}\left(1 - \left(-\dfrac{1}{3}\right)^k\right)$

d. Calculer les limites de a_k, b_k et c_k et interpréter les résultats.