Devoir à faire en binôme, obligatoirement !

Exercice 1

Déterminer si les séries suivantes sont convergentes et le cas échéant, calculer leur somme.

a) $\sum_{n\geqslant 3} \frac{n+5}{2n-4}$

b) $\sum_{n\geqslant 0} \left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)$

c) $\sum_{n\geqslant 1} n^2\left(-\frac{2}{3}\right)^n$

d) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n(\ln(2))^n}{n!}$

Exercice 2

Soit u la suite définie par $u_0=\frac{1}{2}$ et par la relation de récurrence : pour tout $n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=u_n-u_n^3$

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}, u_n\in]0,1[$
2. Montrer que la suite u converge vers 0
3. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n^3$ est convergente et déterminer la valeur de sa somme
4. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n}\geqslant\frac{1}{2}$
5. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}, \frac{1}{u_{n+1}}-\frac{1}{u_n}\leqslant 2u_n$
6. Déterminer alors la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$

Exercice 3

On dispose de 3 urnes numérotées 1, 2 et 3 et
- l'urne numéro 1 contient deux boules blanches,
- l'urne numéro 2 contient une boule blanche et une boule rouge,
- l'urne numéro 3 contient deux boules rouges.

L'expérience consiste à choisir une fois pour toutes une urne au hasard, puis à y effectuer une succession de tirages d'une boule, avec remise. Pour tout entier $k\in\{1,2,3\}$, on note U_k l'événement « on choisit l'urne numéro k ».

On considère la variable aléatoire X égale au rang du tirage où apparaît pour la première fois une boule blanche, si ce tirage existe ; on attribue à X la valeur 0 si on n'obtient jamais de boule blanche.

1. Déterminer l'ensemble des valeurs possibles prises par X
2. Déterminer pour tout $k\in\{1,2,3\}, P_{U_k}(X=1)$ et en déduire $P(X=1)$
3. D'une manière analogue, montrer que pour tout $j\geqslant 2, P(X=j)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^j$
4. Utiliser les résultats précédents pour calculer $P(X=0)$
   Proposer une interprétation de ce dernier résultat.
5. Montrer que X admet une espérance et la calculer, puis interpréter le résultat.
6. Montrer que X admet une variance et la calculer.