Objectifs d'apprentissage

A la fin de ce chapitre, je sais :

- déterminer la loi d'une variable aléatoire : $X(\Omega)$ et les probabilités associés à chaque valeur de X ☐
- utiliser un système complet d'événements pour une variable aléatoire : $\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) = 1$ ☐
- calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire dans des cas finis ou infinis. ☐
- exploiter les propriétés de l'espérance (linéarité, positivité, théorème de transfert) ou de la variance (Kœnig-Huygens et $V(aX + b)$). ☐
- reconnaitre les lois usuelles et exploiter leurs propriétés dans le cas fini (lois uniforme, de Bernoulli ou binomiale) ou infini (lois géométriques ou de Poisson). ☐

Probabilités sur un univers infini

Propriétés ou définitions	**Exemple**
La définition d'une probabilité peut être étendue sans problème à un univers infini. On parlera alors d'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ où $\mathscr{A}$ est l'ensemble des événements. le problème qui se pose est de calculer la probabilité d'un événement qui comporte une infinité d'issues. On le fera avec des séries (cf. ci-dessous).	Une page contient une erreur ; à chaque relecture, la faute est corrigée avec probabilité $\frac{1}{3}$. On introduit pour tout $n \geqslant 1$, l'événement C_n : « la faute est corrigée à la $n^{\text{ième}}$ lecture (et pas avant) » alors $P(C_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \frac{1}{3}$
Propriétés ou définitions conservées : • additivité pour des événements deux à deux incompatibles (désormais possible avec une infinité d'événements) : $$P\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k)$$ • formule des probabilités totales avec $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements, alors pour tout événément B : $$P(B) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(B \cap A_k)$$ Si de plus on a $P(A_n) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors : $$P(B) = \sum_{k=0}^{+\infty} P_{A_k}(B) P(A_k)$$ • probabilités composées, indépendance mutuelle (pour un nombre fini d'événements parmi une suite infinie d'événements) • les définitions des probabilités conditionnelles et de l'indépendance (de deux événements ou mutuelle). *Une nouvelle notation pour les probabilités conditionnelles* (avec les variables aléatoires) : « | » signifie « sachant que ». Par exemple $P(A\|[X = n])$: probabilité de A sachant que X vaut n.	• additivité : avec l'exemple précédent, $\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} C_k = \Omega$ donc $P\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} C_k\right) = 1$ i.e. $\sum_{k=1}^{+\infty} C_k = 1$ Remarque : la formule dit au passage que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} A_k$ converge • formule des probabilités totales en décomposant l'exemple avec deux relecteurs A et B et en notant B : « la faute est corrigée par le relecteur B », alors $P(B) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(C_k \cap B)$ ou $P(B) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(C_k) P_{C_k}(B)$ • lors de tirages avec remise, lancers de dés ou de pièces, il y aura généralement indépendance mutuelle.

Variables aléatoires discrètes

Une **variable aléatoire** réelle (notée parfois var) est en fait une fonction qui à un événement associe un nombre réel. De manière plus concrète, c'est une « variable » (qui prend donc des valeurs) et à chacune de ses valeurs est associée une probabilité On notera alors $[X = x]$ l'événement « la variable aléatoire vaut x »	On lance plusieurs fois de suite un dé, jusqu'à obtenir 6. Plutôt que de modéliser l'univers Ω qui est infini($[3, 1, 1, 5, 2, 3, 6]$ est une issue possible, $[4, 2, 5, 3, 1, 2, 3, 5, 4, 2, 1, 6]$ en est une autre...) ; on va chercher à distinguer ses éléments les uns des autres en « les numérotant ». On définit une variable aléatoire X sur cet univers Ω, qui donne, pour chaque issue possible, le nombre de lancers nécessaires pour obtenir 6. On voit que X est une application de Ω vers $\mathbb{N}^*$, puisqu'elle associe à chaque issue (élément de Ω) un nombre entier (nombre de lancers).
Déterminer la **loi** de X consiste à : • déterminer l'ensemble image $X(\Omega)$ • déterminer, pour chaque $a \in X(\Omega)$, la probabilité $P(X = a)$	avec le même exemple : • $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ • $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6}$
On dit que X est une **variable aléatoire discrète** lorsque $X(\Omega)$ est un ensemble fini (dans ce cas on dit que X est une variable aléatoire **simple**), ou bien lorsqu'il peut s'écrire $\{x_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ En résumé variable aléatoire discrète signifie que le nombre de valeurs prises par la variable est soit fini, soit « de la même taille que $\mathbb{N}$ »	**1.** On lance deux fois de suite un dé et on appelle Y la var, qui donne la somme des deux chiffres obtenus. On a $Y(\Omega) = [\![2, 12]\!]$, qui est donc un ensemble fini, par conséquent Y est une VA discrète. **2.** On lance une pièce jusqu'à obtenir pile, puis l'on s'arrête. Alors X, la variable aléatoire qui donne le numéro du lancer ayant permis d'obtenir pile, est discrète, puisque $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$
Propriété : si X est une variable aléatoire discrète, • alors les événements $[X = x]$, avec $x \in X(\Omega)$, forment un système complet d'événements. • en particulier, si $X(\Omega) = \mathbb{N}$, la suite des événements $\big([X = n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} P(X = n)$ est donc convergente, de somme égale à 1 : $$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = 1$$	avec les mêmes exemples : **1.** si on note, pour $k \in [\![2, 12]\!]$, $A_k = [Y = k]$, alors $A_2, A_3, \ldots, A_{12}$ forment un SCE. **2.** La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un SCE, avec $A_n = [X = n]$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 1$ ce que l'on retrouve car $P(A_n) = \frac{1}{2^{n-1}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}$
Si $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire, et f une fonction telle que $X(\Omega) \subset \mathscr{D}_f$, on note $f(X)$ l'application composée $f \circ X$, il s'agit d'une variable aléatoire sur Ω, on parle de **variable aléatoire image**	Avec une urne qui contient 4 boules blanches et six boules noires. On pioche successivement et sans remise deux boules. On considère la VAR X qui donne le nombre de boules blanches obtenues, et $Y = (X - 1)^2$ La loi de Y est donnée par : $Y(\Omega) = \{0, 1\}$ et $P(Y = 1) = P(X = 2) + P(X = 0) = \frac{1}{3} + \frac{2}{15} = \frac{7}{15}$ et $$P(Y = 0) = P(X = 1) = \frac{8}{15}$$

Espérance

Soit X une variable aléatoire discrète. 1) Lorsque $X(\Omega)$ est fini, on peut noter $X(\Omega)=\{x_1,\dots,x_n\}$ L'**espérance de** X, notée $E(X)$, est définie par : $$E(X)=\sum_{k=1}^{n} x_k P(X=x_k)$$ 2) Lorsque $X(\Omega)$ est infini, on peut noter $X(\Omega)=\{x_n\,;\,n\in\mathbb{N}\}$ On dit que X **admet une espérance** lorsque la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n P(X=x_n)$ est **absolument convergente**. Dans ce cas, l'espérance de X est le nombre : $$E(X)=\sum_{k=0}^{+\infty} x_k P(X=x_k)$$ 3) En particulier, lorsque $X(\Omega)=\mathbb{N}$, on dit que X **admet une espérance** lorsque la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} nP(X=n)$ est **absolument convergente**. Dans ce cas, $E(X)=\sum_{k=0}^{+\infty} kP(X=k)$	Remarques : • l'espérance d'une variable aléatoire X est donc la moyenne pondérée des valeurs prises par X, les pondérations (poids) correspondent aux probabilités respectives de chaque valeur de X. • avec une loi certaine qui ne prend que la valeur a, naturellement son espérance est a ($E(X)=aP(X=a)=a$). Exemple : dans une urne qui contient 4 boules blanches et six boules noires, on pioche successivement et sans remise deux boules. On considère la VAR X qui donne le nombre de boules blanches obtenues. La loi de X est définie par $P(X=0)=\frac{1}{3}$ $P(X=1)=\frac{8}{15}$ et $P(X=2)=\frac{2}{15}$ donc son espérance vaut : $E(X)=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{2}{15}=\frac{4}{5}$
Linéarité de l'espérance : soit X et Y deux VA discrètes qui admettent une espérance, et a et b des réels, alors la variable aléatoire $aX+bY$ admet une espérance, et $E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$ Cas particuliers : $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ $E(aX)=aE(X)$ et $E(aX+b)=aE(X)+b$	Si vous jouez à deux jeux à gratter, ce que vous pouvez espérer gagner (ou perdre) au total est la somme des espérances de gain pour chaque jeu.
Positivité et croissance de l'espérance : si X et Y sont deux VA discrètes admettant chacune une espérance et si $X\leqslant Y$ alors $E(X)\leqslant E(Y)$ Cas particulier : si $X\geqslant 0$ alors $E(X)\geqslant 0$	On lance deux dés. On note X et Y les VA donnant respectivement le minimum et le maximum des chiffres obtenus sur les deux faces des deux dés. On aura donc $E(X)\leqslant E(Y)$
On dit qu'une variable aléatoire X est **centrée** si $E(X)=0$	la variable aléatoire $Y=X-E(X)$ est centrée, car $E(Y)=E(X-E(X))=E(X)-E(X)=0$
Théorème de transfert : soit X une VA discrète, et f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ $f(X)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(x_n)P(X=x_n)$ est absolument convergente, et dans ce cas $$E\big(f(X)\big)=\sum_{k=0}^{+\infty} f(x_k)P(X=x_k)$$	Remarque : l'intérêt du théorème est de déterminer l'espérance de la variable aléatoire $f(X)$ (l'image de X) en ne connaissant que la loi de X Exemple : avec l'urne contenant 4 boules blanches et six boules noires et deux pioches successives sans remise. la VAR X donne le nombre de boules blanches obtenues. On a : $P(X=0)=\frac{1}{3}$, $P(X=1)=\frac{8}{15}$, et $P(X=2)=\frac{2}{15}$, donc on trouve : $E(X^2)=\frac{8}{15}+4\times\frac{2}{15}=\frac{16}{15}$

Variance

Soit X une VA discrète, si X^2 admet une espérance, on dit que X **admet un moment d'ordre** 2 On appelle alors **variance** de X, et on note $V(X)$, le nombre réel défini par : $$V(X)=E\big((X-E(X))^2\big)$$	Remarques : comme en statistiques, la variance donne une information sur « la moyenne du carré de l'écart à la moyenne ». Elle sert à mesurer la dispersion des valeurs d'une VA.
Soit X une VA discrète X admettant un moment d'ordre 2 alors $V(X)\geqslant 0$ et on appelle **écart-type** de X, et on note $\sigma(X)$, le réel $$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$$	
Formule de Kœnig-Huygens : soit X une VA discrète admettant un moment d'ordre 2, alors $$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$$	
Soit a et b deux réels, et X une VA discrète, admettant un moment d'ordre 2, alors $$V(aX+b)=a^2V(X) \quad \text{et} \quad \sigma(aX+b)=\lvert a\rvert\sigma(X)$$	⚠ la variance n'est pas linéaire (l'écart-type non plus)
Soit X une VA discrète admettant un moment d'ordre 2. On dit que X est **réduite** lorsque $V(X)=1$	On parle de VA centrée réduite lorsque $E(X)=0$ et $V(X)=1$

Illustration de la variance :

Le gardien d'un zoo dépose 30 kg de viande dans la cage aux lions, où vivent trois lions. On considère respectivement X_1, X_2 et X_3 les variables aléatoires qui donnent la quantité (en kg) de viande ingérée par chaque lion dans chacune des situations équiprobables suivantes.

- situation 1 : les trois lions ont mangé chacun 10 kg de viande ;
- situation 2 : un des lions a mangé 8 kg de viande, le deuxième 10 et le troisième 12 ;
- situation 3 : l'un des lions n'a rien mangé, un autre a mangé 20 kg de viande et le troisième 10.

On trouve alors :

$E(X_1)=3\times(10\times\frac{1}{3})=10$,

$E(X_2)=8\times\frac{1}{3}+10\times\frac{1}{3}+12\times\frac{1}{3}=10$ et

$E(X_3)=\frac{1}{3}(20+10)=10$

L'espérance est la même dans chaque situation, ce qui montre que la notion d'espérance n'est pas adaptée pour différencier ces situations. Les calculs de variance donnent :

- $V(X_1)=(10-10)^2P(X_1=10)=0$ (théorème de transfert)
- $V(X_2)=(8-10)^2P(X_2=8)+(10-10)^2P(X_2=10)+(12-10)^2P(X_2=12)=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$
- $V(X_3)=(0-10)^2P(X_3=0)+(10-10)^2P(X_3=10)+(20-10)^2P(X_3=20)=\frac{200}{3}$

Sur ces trois exemples, on remarque que plus l'ensemble image est étendu, plus la variance est grande.

Lois usuelles finies

Il s'agit de lois de variables aléatoires qui prennent un nombre fini de valeurs (i.e. pour lesquelles l'ensemble $X(\Omega)$ est fini).

Loi certaine : une variable aléatoire X suit une **loi certaine** lorsque X ne prend qu'une seule valeur a (avec $a \in \mathbb{R}$), autrement dit lorsque : $X(\Omega) = \{a\}$ Propriété : une variable aléatoire X suit une loi certaine si et seulement si $V(X) = 0$	Remarque : comme vu plus haut, si X suit une loi certaine ($X(\Omega) = a$) alors $E(X) = a$
Loi uniforme : soit $E = [\![a, b]\!]$ avec a et b des entiers relatifs on pose $n = b - a + 1$ (E est de cardinal n) On dit qu'une variable aléatoire X suit une **loi uniforme** sur E, et on note $X \hookrightarrow \mathscr{U}(E)$ lorsque : • $X(\Omega) = E$ • $\forall k \in [\![a, b]\!], \quad P(X = k) = \dfrac{1}{n}$ Propriété : $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ et $V(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$	Comment la reconnaitre ? La loi uniforme est suivie par des variables aléatoires représentant un choix « au hasard ». Il s'agit de la loi représentant une situation d'équiprobabilité (pour les valeurs de X). Exemple : une urne contient 16 boules indiscernables numérotées de 0 à 15. On pioche une boule dans l'urne. Soit X la VAR donnant le numéro de la boule piochée. X suit la loi $\mathscr{U}([\![0, 15]\!])$ Pour chaque $k \in [\![0, 15]\!]$, $P(X = k) = \dfrac{1}{16}$ de plus $E(X) = 7,5$
Loi de Bernoulli : soit $p \in [0, 1]$, et $q = 1 - p$ On dit que la variable aléatoire X suit une **loi de Bernoulli de paramètre** p, et on note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(1, p)$ (ou encore $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$) lorsque : • $X(\Omega) = \{0, 1\}$ • $P(X = 1) = p \quad \text{et} \quad P(X = 0) = q$ Propriétés : $E(X) = p$ et $V(X) = pq$ *Exercices 1 et 14*	Comment la reconnaitre ? Cette loi modélise les épreuves aléatoires dites **épreuves de Bernoulli**, i.e. ayant exactement deux issues possibles : succès avec la probabilité $p \in [0, 1]$ et échec avec la probabilité $q = 1 - p$ Exemple : on considère un dé à six faces, pipé. La probabilité d'obtenir un nombre pair est trois fois plus élevée que celle d'obtenir un nombre impair. Soit X la variable aléatoire qui vaut 1 si le résultat est pair, et 0 si le résultat est impair. Notons $p = P(X = 1)$, alors $p = 3(1 - p)$, donc $p = \dfrac{3}{4}$ La VAR X suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{3}{4}$, ce qui se note $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(1, \dfrac{3}{4}\right)$ ou $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\dfrac{3}{4}\right)$
Loi binomiale : soit $p \in [0, 1]$, $q = 1 - p$ et $n \in \mathbb{N}^*$ On dit que la variable aléatoire X suit une **loi binomiale de paramètre** n **et** p, et on note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$ lorsque : • $X(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$ • pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$ Propriétés : $E(X) = np$ et $V(X) = npq$ *Exercices 12, 16 et 18*	Comment la reconnaitre ? Il s'agit en fait du nombre de succès lors de la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques (de paramètre p) et indépendantes, d'où la notation analogue (on parle également de schéma de Bernoulli). Exemple : une urne contient 50 boules, 30 blanches et 20 noires. On effectue dans l'urne 9 tirages successifs avec remise. Soit X la VAR qui donne le nombre total de boules blanches qui ont été piochées. Alors $X \hookrightarrow B(9, p)$, avec $p = \dfrac{3}{5}$ Pour tout $k \in [\![0, 9]\!]$, $P(X = k) = \binom{9}{k} \dfrac{3^k \times 2^{9-k}}{5^9}$ et $E(X) = 9 \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{27}{5}$

Lois usuelles infinies

Il s'agit de lois de variables aléatoires qui prennent un nombre infini de valeurs (i.e. pour lesquelles l'ensemble $X(\Omega)$ est infini).

Loi géométrique soit $p \in]0,1[$ on dit que la variable aléatoire X suit la **loi géométrique** de paramètre p lorsque : • $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ • pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X=n) = p(1-p)^{n-1}$ on note alors $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$ Propriétés : dans ce cas X admet une espérance et une variance et $$E(X) = \frac{1}{p}$$ $$V(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$ *Exercices 13, 15 et 19*	Comment la reconnaitre ? Cela correspond à la situation où X désigne le rang d'apparition du premier succès lors d'une répétition d'épreuves de Bernoulli identiques (de paramètre p) et indépendantes. Exemple : on lance successivement une même pièce, la probabilité d'obtenir pile à chaque lancer vaut p. La VA X qui donne le rang d'apparition du premier pile suit une loi géométrique de paramètre p En effet, $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$: $[X = n] = E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_{n-1} \cap S_n$, avec les événements E_k : « on obtient face au $k^{\text{ième}}$ lancer » et S_k : « on obtient pile au $k^{\text{ième}}$ lancer ». Tous ces événements sont mutuellement indépendants, donc $P(X=n) = P(E_1) \times P(E_2) \times \ldots \times P(E_{n-1}) \times P(S_n)$ $= (1-p)^{n-1}p$ Remarques : • les calculs avec la loi géométrique (par exemple l'espérance) font intervernir des sommes ou des séries géométriques • la loi géométrique est dite « sans mémoire » car le nombre d'épreuves à répéter jusqu'à l'obtention d'un premier succès est le même, quel que soit le nombre d'épreuves effectuées auparavant, i.e. $P(X > n+m \mid X > n) = P(X > m)$
Loi de Poisson : soit $\lambda > 0$ on dit que la variable aléatoire X suit la **loi de Poisson** de paramètre λ lorsque : • $X(\Omega) = \mathbb{N}$ • pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X=n) = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$ on note alors $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ Propriétés : dans ce cas X admet une espérance et une variance et $$E(X) = \lambda$$ $$V(X) = \lambda$$ *Exercice 16*	Dans quel type de situation ? Les lois de Poisson permettent de modéliser des situations où l'on compte le nombre d'événements d'un certain type qui vont se produire durant un intervalle de temps donné. Par exemple lorsque X va compter durant un intervalle de temps : • le nombre de connexions à un serveur web ; • le nombre de clients se présentant à un distributeur de billets ; • le nombre de passagers se présentant à une station de métro ; • le nombre de poissons traversant une passe. En général, on n'aura pas à reconnaitre cette loi (parce qu'on ne peut pas deviner le paramètre). Remarque : avec X une VA qui suit une loi de Poisson de paramètre λ, on peut vérifier aisément que $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) = 1$ En effet $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$ $= e^{-\lambda}e^{\lambda} = e^0 = 1$