ECG 1 - mathématiques appliquées   Devoir en temps libre n°9   Pour le 31 mars 2025

Corrigé   *Total sur 27 points*

Exercice 1   *5,5 points*

Déterminer si les séries suivantes sont convergentes et le cas échéant, calculer leur somme.

a) $\sum_{n\geqslant 3}\dfrac{n+5}{2n-4}$ est grossièrement divergente car $\dfrac{n+5}{2n-4}\to\dfrac{1}{2}$, en effet $\dfrac{n+5}{2n-4}=\dfrac{n}{2n}\times\dfrac{1+\frac{5}{n}}{1-\frac{2}{n}}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1+\frac{5}{n}}{1-\frac{2}{n}}$ *1 point*

et $\dfrac{5}{n}\to 0$ et $\dfrac{2}{n}\to 0$ (limites usuelles) donc $1+\dfrac{5}{n}\to 1$ et $1+\dfrac{2}{n}\to 1$ et on conclut par opérations

b) $\sum_{n\geqslant 0}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)$ est une série télescopique, elle est donc de même nature que son terme général   *1 point*

i.e. de même nature que $(\sqrt{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, elle est donc divergente. On peut éventuellement poser $u_n=\sqrt{n+1}$ pour y voir plus clair (cela permet aussi de montrer qu'elle diverge vers $+\infty$)

c) $\sum_{n\geqslant 1}n^2\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$ On s'oriente vers une série géométrique et on va utiliser l'astuce $n^2=n(n-1)+n$ *2 points*

soit $n\in\mathbb{N}^*$, alors $\sum_{k=1}^{n}k^2\left(-\dfrac{2}{3}\right)^k=\sum_{k=1}^{n}[k(k-1)+k]\left(-\dfrac{2}{3}\right)^k=\sum_{k=1}^{n}k(k-1)\left(-\dfrac{2}{3}\right)^k+\sum_{k=1}^{n}k\left(-\dfrac{2}{3}\right)^k$

or $\sum_{k=1}^{n}k(k-1)\left(-\dfrac{2}{3}\right)^k=\sum_{k=2}^{n}k(k-1)\left(-\dfrac{2}{3}\right)^k=\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2\sum_{k=2}^{n}k(k-1)\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{k-2}$, on est ramené à une série géométrique « dérivée seconde » dont la raison, $-\dfrac{2}{3}\in]-1,1[$

donc $\sum_{n\geqslant 2}n(n-1)\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$ converge et $\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n=\dfrac{2}{\left(1-\left(-\frac{2}{3}\right)\right)^3}=\dfrac{2}{\left(\frac{5}{3}\right)^3}=\dfrac{2}{\frac{125}{27}}=\dfrac{54}{125}$

de plus $\sum_{k=1}^{n}k\left(-\dfrac{2}{3}\right)^k=\left(-\dfrac{2}{3}\right)\sum_{k=1}^{n}k\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{k-1}$ et $\sum_{k\geqslant 1}k\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{k-1}$ converge (série géométrique « dérivée » et $|q|<1$) avec $\sum_{k=1}^{+\infty}k\left(-\dfrac{2}{3}\right)^k=\dfrac{1}{\left(1-\left(-\frac{2}{3}\right)\right)^2}$ donc $\sum_{k=1}^{n}k^2\left(-\dfrac{2}{3}\right)^k$ converge et

$\sum_{k=1}^{+\infty}k^2\left(-\dfrac{2}{3}\right)^k=\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2\times\dfrac{54}{125}-\dfrac{2}{3}\times\dfrac{9}{25}=\dfrac{4\times 6\times 9}{9\times 125}-\dfrac{2\times 3\times 3}{3\times 25}=\dfrac{24}{125}-\dfrac{6}{25}=\dfrac{24}{125}-\dfrac{30}{125}=-\dfrac{6}{125}$

d) $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{n(\ln(2))^n}{n!}$ On s'oriente vers une série exponentielle :   *1,5 points*

soit $n\in\mathbb{N}^*$, alors $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k(\ln(2))^k}{k!}=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{(\ln(2))^k}{(k-1)!}$ (car $\dfrac{k}{k!}=\dfrac{1}{(k-1)!}$)

puis avec le changement d'indice $i=k-1$, on trouve $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k(\ln(2))^k}{k!}=\sum_{i=0}^{n-1}\dfrac{(\ln(2))^{i+1}}{i!}=\ln(2)\sum_{i=0}^{n-1}\dfrac{(\ln(2))^i}{i!}$

or $\sum_{i=0}^{n}\dfrac{(\ln(2))^i}{i!}$ converge vers $e^{\ln(2)}=2$ donc c'est le cas également de $\sum_{i=0}^{n-1}\dfrac{(\ln(2))^i}{i!}$

puis en multipliant par $\ln(2)$, on trouve que $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{n(\ln(2))^n}{n!}$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n(\ln(2))^n}{n!}=2\ln(2)$

Exercice 2   *9,5 points*

Soit u la suite définie par $u_0=\dfrac{1}{2}$ et par la relation de récurrence : pour tout $n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=u_n-u_n^3$

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}, u_n\in]0,1[$ *1,5 points*

Du grand classique, par récurrence ! Pour $n\in\mathbb{N}$, on définit $P(n)$: $u_n\in]0,1[$

<u>Initialisation</u> : $u_0=\dfrac{1}{2}$ donc $u_0\in]0,1[$ donc $P(0)$ est vraie

<u>Hérédité</u> : soit $n\in\mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ est vraie, alors par hypothèse $u_n\in]0,1[$ i.e. $0<u_n<1$
$0<u_n<1\Rightarrow 0<u_n^2<1$ (par stricte croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$)
donc $-1<-u_n^2<0\Rightarrow 0<1-u_n^2<1$ donc par produit avec l'inégalité $0<u_n<1$, on trouve $0<u_n(1-u_n^2)<1$

i.e. $0 < u_{n+1} < 1$ donc $P(n+1)$ est vraie, d'où l'hérédité
donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie, i.e. $u_n \in]0,1[$

2. Montrer que la suite u converge vers 0 *2 points*

Par définition de la suite $u_{n+1} - u_n = -u_n^3 \leqslant 0$ d'après la question précédente ($u_n \geqslant 0 \Rightarrow u_n^3 \geqslant 0$)
donc la suite u est décroissante, de plus elle est minorée par 0 d'après la question précédente
donc d'après le théorème de la limite monotone, u converge vers un réel ℓ
or par propriété $u_{n+1} \to \ell$ et par opérations $u_n - u_n^3 \to \ell - \ell^3$
donc par passage à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = u_n - u_n^3$, on trouve $\ell = \ell - \ell^3$
donc $\ell^3 = 0$ et de fait $\ell = 0$, i.e u converge vers 0

3. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n^3$ est convergente et déterminer la valeur de sa somme *1,5 points*

Par définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\sum_{n\geqslant 0} u_n^3 = \sum_{n\geqslant 0}(u_n - u_{n+1})$ qui est une série télescopique et donc de même nature que la suite u, or d'après la question précédente u converge donc $\sum_{n\geqslant 0}(u_n - u_{n+1})$ converge i.e. $\sum_{n\geqslant 0} u_n^3$ converge
de plus $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^3 = \sum_{n=0}^{+\infty}(u_n - u_{n+1}) = u_0 - 0$ par propriété (car $u_n \to 0$) or $u_0 = \frac{1}{2}$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^3 = \frac{1}{2}$

4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{1}{2}$ *1 point*

Par définition de la suite, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n - u_n^3}{u_n} = 1 - u_n^2$
or $u_0 = \frac{1}{2}$ et d'après **2.**, u est décroissante donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant \frac{1}{2}$ et d'après **1.** $u_n \geqslant 0$
donc $u_n^2 \leqslant \frac{1}{4}$ car la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}_+$
donc $-u_n^2 \geqslant -\frac{1}{4}$ et donc $1 - u_n^2 \geqslant \frac{3}{4}$ i.e. $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{3}{4}$ et a fortiori $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{1}{2}$

5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \leqslant 2u_n$ *1,5 points*

Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n u_{n+1}} = \frac{u_n^3}{u_n u_{n+1}}$ par définition de u puis $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n^2}{u_{n+1}} = \frac{u_n}{u_{n+1}} \times u_n$
or d'après la question précédente $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{1}{2}$ donc $\frac{u_n}{u_{n+1}} \leqslant 2$ (car la fonction inverse est décroissante sur $]0, +\infty[$)
et donc $\frac{u_n}{u_{n+1}} \times u_n \leqslant 2u_n$ (car $u_n \geqslant 0$) i.e. $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \leqslant 2u_n$

6. Déterminer alors la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *2 points*

La question précédente nous incite à raisonner par comparaison avec la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}\right)$
or cette dernière est télescopique (pour mieux le voir on peut poser $v_n = \frac{1}{u_n}$, il s'agit alors de $\sum_{n\geqslant 0}(v_{n+1} - v_n)$)
donc la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}\right)$ est de même nature que la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est divergente
car $u_n \to 0^+ \Rightarrow \frac{1}{u_n} \to +\infty$ donc $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}\right)$ diverge et il s'agit d'une série à termes positifs puisque
$u_{n+1} \leqslant u_n \Rightarrow \frac{1}{u_{n+1}} \geqslant \frac{1}{u_n}$ (inversion de termes positifs) i.e. $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \geqslant 0$
de plus d'après **5.**, $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \leqslant 2u_n$ donc $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}\right) \leqslant u_n$
or la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}\right)$ diverge donc la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}\right)$ diverge par opération
donc la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ qui est à termes positifs, diverge vers $+\infty$ par théorème de comparaison sur les séries à termes positifs.

Exercice 3 *12 points*

On dispose de 3 urnes numérotées 1, 2 et 3 et
- l'urne numéro 1 contient deux boules blanches,
- l'urne numéro 2 contient une boule blanche et une boule rouge,
- l'urne numéro 3 contient deux boules rouges.

L'expérience consiste à choisir une fois pour toutes une urne au hasard, puis à y effectuer une succession de tirages d'une boule, avec remise. Pour tout entier $k \in \{1, 2, 3\}$, on note U_k l'événement « on choisit l'urne numéro k ».
On considère la variable aléatoire X égale au rang du tirage où apparaît pour la première fois une boule blanche, si ce tirage existe ; on attribue à X la valeur 0 si on n'obtient jamais de boule blanche.

1. Déterminer l'ensemble des valeurs possibles prises par X *0,5 point*

De manière théorique, la boule blanche peut apparaitre à n'importe quel tirage (à partir du premier) et elle peut aussi ne jamais être tirée comme l'indique l'énoncé, donc $X(\Omega) = \mathbb{N}$

2. Déterminer pour tout $k \in \{1, 2, 3\}, P_{U_k}(X = 1)$ et en déduire $P(X = 1)$ *2 points*

D'après les hypothèses de l'énoncé, $P_{U_1}(X = 1) = 1$ (il n'y a que des boules blanches dans l'urne 1), $P_{U_2}(X = 1) = \dfrac{1}{2}$ (une boule blanche sur les deux de l'urne 2, le tirage de chacune étant équiprobable) et $P_{U_3}(X = 1) = 0$ (aucune boule blanche dans l'urne 3).

(U_1, U_2, U_3) forment un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :
$P(X = 1) = P(U_1)P_{U_1}(X = 1) + P(U_2)P_{U_2}(X = 1) + P(U_3)P_{U_3}(X = 1)$

or le choix de chaque urne est équiprobable donc $P(U_1) = P(U_2) = P(U_3) = \dfrac{1}{3}$

donc $P(X = 1) = \dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{1}{2} + 0\right) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2}$

3. D'une manière analogue, montrer que pour tout $j \geqslant 2, P(X = j) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^j$ *2 points*

Si l'urne 1 a été choisie au départ, la boule blanche apparait forcément dès le premier tirage et elle ne peut donc pas apparaitre pour la première fois au $j^{\text{ème}}$ avec $j \geqslant 2$, donc $P_{U_1}(X = j) = 0$
Si l'urne 2 a été choisie au départ, le fait que la boule blanche soit tirée pour la première fois au $j^{\text{ème}}$ tirage signifie que la boule rouge a été tirée lors des $j - 1$ tirages précédents
donc (en notant B_i (respectivement R_i) : « on tire une boule blanche (resp. rouge) dans l'urne 2 au $i^{\text{ème}}$ tirage ») : $P_{U_2}(X = j) = P(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_{j-1} \cap B_j)$
donc par indépendance mutuelle des tirages $P_{U_2}(X = j) = P(R_1)P(R_2) \dots P(R_{j-1})P(B_j)$
et donc $P_{U_2}(X = j) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{j-1}\dfrac{1}{2} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^j$
et de même $P_{U_3}(X = j) = 0$ (aucune boule blanche dans l'urne 3).

ensuite on procède de même, (U_1, U_2, U_3) forment un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales
$P(X = j) = P(U_1)P_{U_1}(X = j) + P(U_2)P_{U_2}(X = j) + P(U_3)P_{U_3}(X = j)$
donc $P(X = j) = \dfrac{1}{3}\left(0 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^j + 0\right) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^j$

4. Utiliser les résultats précédents pour calculer $P(X = 0)$ *2 points*
Proposer une interprétation de ce dernier résultat.

Par définition $[X = 0]$ est l'événement contraire de « une boule blanche a été tirée » (sous-entendu au premier tirage, ou au deuxième tirage ... ou au $j^{\text{ème}}$, $j \in \mathbb{N}$)
ce que l'on peut écrire $[X = 0] = \overline{\bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}^*} [X = j]}$

or les événements de la famille $([X = j])_{j \in \mathbb{N}^*}$ sont deux à deux incompatibles donc par additivité :
$P\left(\bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}^*} [X = j]\right) = \sum\limits_{j=1}^{+\infty} P(X = j) = P(X = 1) + \sum\limits_{j=2}^{+\infty} P(X = j) = \dfrac{1}{2} + \sum\limits_{j=2}^{+\infty} \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^j$ attention la formule du **3.** n'est valable que pour $i \geqslant 2$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\sum_{j=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^j$$ par opération sur les séries convergentes car $\sum\limits_{j \geqslant 2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^j$ est une série géométrique avec $|q| = \dfrac{1}{2} < 1$, elle est donc convergente

de plus $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum\limits_{j=0}^{n}\left(\dfrac{1}{2}\right)^j = 1 + \dfrac{1}{2} + \sum\limits_{j=2}^{n}\left(\dfrac{1}{2}\right)^j$ donc par passage à la limite $\sum\limits_{j=0}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^j = 1 + \dfrac{1}{2} + \sum\limits_{j=2}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^j$

donc $\displaystyle\sum_{j=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^j = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{\frac{1}{2}} - 1 - \frac{1}{2} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

et donc $P\left(\displaystyle\bigcup_{j\in\mathbb{N}^*}[X=j]\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{6} = \frac{3}{6}+\frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ et finalement $P(X=0) = 1-P\left(\displaystyle\bigcup_{j\in\mathbb{N}^*}[X=j]\right)$ (car c'est l'événement contraire) donc $P(X=0) = 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, ce qui signifie que dans un cas sur trois on ne tire jamais une boule blanche, ce qui correspond au cas où on choisit l'urne 3.

5. Montrer que X admet une espérance et la calculer, puis interpréter le résultat. *3 points*

Par définition, X admet une espérance si la série $\displaystyle\sum_{j\in\mathbb{N}} jP(X=j)$ est convergente (absolument)

or $\forall n \geqslant 2, \displaystyle\sum_{j=0}^{n} jP(X=j) = \sum_{j=2}^{n} jP(X=j) = 1\times P(X=1) + \sum_{j=2}^{n} jP(X=j)$

(attention l'expression de $P(X=j)$ n'est pas la même pour $j=1$ et pour $j \geqslant 2$)

donc $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} jP(X=j) = \frac{1}{2} + \sum_{j=2}^{n} j\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^j = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\sum_{j=2}^{n} j\left(\frac{1}{2}\right)^j = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n} j\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}$

$\displaystyle = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sum_{j=2}^{n} j\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}$ et la série $\displaystyle\sum_{j=2}^{n} j\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}$ est convergente car il s'agit d'une série géométrique « dérivée » avec $|q| = \frac{1}{2} < 1$

donc par opération $\displaystyle\sum_{j\in\mathbb{N}} jP(X=j)$ est convergente et de fait X admet une espérance

de plus $E(X) = \displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} jP(X=j) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sum_{j=2}^{+\infty} j\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}$

or $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} j\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{(\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$ et $\displaystyle 1 + \sum_{j=2}^{+\infty} j\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} = \sum_{j=1}^{+\infty} j\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}$

donc $\displaystyle\sum_{j=2}^{+\infty} j\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} = 4-1 = 3$ et donc $E(X) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\times 3 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$

cela signifie qu'en moyenne une boule blanche sortira au « 1^{er} tirage », mais cette interprétation est faussée par le « $0^{\text{ème}}$ tirage » qui apparait en moyenne une fois sur 3. Si on raisonne « en moyenne », cela signifie que ce 1 est composé de 0 une fois sur trois, et de fait de $\frac{3}{2}$ deux fois sur trois, c'est-à-dire qu'en moyenne si on s'intéresse uniquement aux urnes 1 et 2, la boule blanche est tirée en moyenne au bout de « $1,5$ tirages ». Ce qui logique car une fois deux une boule blanche est tirée à coup sûr, et donc en moyenne, au premier tirage et une fois sur deux (urne 2), elle est tirée en moyenne au deuxième tirage (loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$).

6. Montrer que X admet une variance et la calculer. *2,5 points*

De même par définition, X admet une variance si X^2 admet une espérance, i.e. si la série $\displaystyle\sum_{j\in\mathbb{N}} j^2P(X=j)$ est convergente et on va de nouveau être ramené à des séries géométriques (de même attention à la validité de la formule du **3.**) :

$\forall n \geqslant 2, \displaystyle\sum_{j=0}^{n} j^2P(X=j) = \sum_{j=1}^{n} j^2P(X=j) = 1^2P(X=1) + \sum_{j=2}^{n} j^2P(X=j) = \frac{1}{2} + \sum_{j=2}^{n} j^2\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^j$

or $\displaystyle\sum_{j=2}^{n} j^2\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^j = \frac{1}{3}\sum_{j=2}^{n} j^2\left(\frac{1}{2}\right)^j = \sum_{j=2}^{n}(j(j-1)+j)\left(\frac{1}{2}\right)^j$ car $j^2 = j^2 - j + j = j(j-1)+j$

donc $\displaystyle\sum_{j=2}^{n} j^2P(X=j) = \sum_{j=2}^{n} j(j-1)\left(\frac{1}{2}\right)^j + \sum_{j=2}^{n} j\left(\frac{1}{2}\right)^j = \left(\frac{1}{2}\right)^2\sum_{j=2}^{n} j(j-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{j-2} + \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n} j\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}$

or la série $\displaystyle\sum_{j\geqslant 2} j(j-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{j-2}$ est convergente et $\displaystyle\sum_{j=2}^{+\infty} j(j-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{j-2} = \frac{2}{(1-\frac{1}{2})^3} = \frac{2}{\frac{1}{8}} = 16$ car il s'agit d'une série géométrique « dérivée seconde » avec $|q| = \frac{1}{2} < 1$

de plus, comme vu plus haut, $\displaystyle\sum_{j\geqslant 2} j\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}$ converge et $\displaystyle\sum_{j=2}^{+\infty} j\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} = 3$ donc par opérations $\displaystyle\sum_{j=2}^{n} j^2P(X=j)$ est convergente et de fait X^2 admet une espérance