Objectifs d'apprentissage

A la fin de ce chapitre, je sais :

- écrire et interpréter un système linéaire ☐
- reconnaitre les différents systèmes linéaires : homogène, échelonné, triangulaire ☐
- utiliser l'écriture matricielle pour traduire un système linéaire ☐
- donner les différentes formes de l'ensemble des solutions d'un système linéaire ☐
- résoudre un système linéaire avec la méthode du pivot de Gauss ☐
- déterminer l'inverse d'une matrice A en résolvant le système $AX = Y$ ☐
- utiliser la méthode des « inconnues invisibles » pour la résolution de système ou l'inversion de matrice ☐
- déterminer si un système est de Cramer, en particulier donner et exploiter la condition d'inversibilité d'une matrice triangulaire ☐

Rappel : nous avons déjà résolu des systèmes, par exemple dans l'étude des suites récurrentes linéaires d'ordre 2, par substitution ou combinaison.

Dans ces situations, on obtenait une unique solution, mais les systèmes linéaires peuvent également aboutir à l'absence de solution, ou à une infinité de solutions, par exemple :

$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = -4 \end{cases}$ On trouve une unique solution : $x = -1$ et $y = 3$	$\begin{cases} x - 3y = 1 \\ -2x + 6y = -5 \end{cases}$ Les deux équations se « contredisent », il n'y a pas de solution.	$\begin{cases} -x + y = 2 \\ 2y + z = -4 \end{cases}$ Moins de contraintes, 2 équations pour trois inconnues et une infinité de solutions : $x \in \mathbb{R}$, $y = 2+x$ $z = -4-2y$

En bref : nous disposerons désormais d'une méthode « systématique » pour la résolution des systèmes linéaires : le pivot de Gauss. De plus, l'écriture matricielle et l'inversibilité nous donne une nouvelle interprétation de ces systèmes et des critères pour leur résolution.

1 Définitions et interprétations

1.1 Généralités sur les systèmes linéaires

Définition : soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$

On appelle **système linéaire** de n équations et p inconnues $x_1, \ldots, x_p$ tout système de la forme suivante :

$$(S) \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

où pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, p]\!]$, on suppose donnés les coefficients réels $a_{i,j}$ et b_i

Résoudre le système (S) consiste à trouver tous les réels $x_1, x_2, \ldots, x_p$ (appelés **inconnues** du système), vérifiant les n équations de (S)

Pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, on note L_i et on appelle $i^{\text{ème}}$ **ligne** du système, la $i^{\text{ème}}$ équation du système (S)

Remarque : on parle de système linéaire, car dans les équations du système, les inconnues sont multipliées par des constantes, puis on en fait des sommes. On n'aura pas de produit ou de quotient d'inconnues, ni de x^2 ou y^3, ni de $\ln(x)$, ni de $\exp(y)$ avec x, y des inconnues...

Définitions :

- lorsque pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, $b_i = 0$, on dit que le système (S) est **homogène**.
- on dit que le système (S) est **compatible** lorsqu'il admet des solutions. Sinon, on dira qu'il est **incompatible**.
- lorsque le système admet autant d'inconnues que d'équations ($n = p$), on dit que le systéme est **carré**.

Propriété :

un système homogène est toujours compatible, il admet toujours la « solution nulle » :

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

Exemples :

1. le système (S_1) : $\begin{cases} x + 5y = 1 \\ 2x + y = 0 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ est

En effet

2. (S_2) : $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ est un système linéaire , il est donc ,

est une solution

Les solutions de S sont

En effet

1.2 Interprétation matricielle

Notons (S) le système linéaire de n équations et p inconnues $x_1, \ldots, x_p$:

$$(S) \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

En notant :

$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$,

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$

$$\boxed{\text{le système s'écrit } AX = B}$$

La matrice A s'appelle alors la **matrice du système** (S)

La matrice-colonne B est appelée le **second membre du système** (S)

Exemples :

1. soit (S) : $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2z = 3 \\ 2x + 3y + 4z = 6 \\ x - 3y = 15 \end{cases}$

alors $A = \begin{pmatrix} \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{pmatrix}$

sont respectivement la matrice et le second membre du système.

2. soit (S) : $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_4 &= 1 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 &= 3 \\ 4x_3 - x_4 &= -1 \\ 3x_4 &= 15 \end{cases}$

alors $A = \begin{pmatrix} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{pmatrix}$

sont respectivement la matrice et le second membre du système.

Dans le cas où la matrice du système est triangulaire, la résolution est rapide :

2 Résolution

2.1 Ensemble des solutions

Soit le système

$$(S)\quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

Propriété :
- lorsque $n \neq p$, soit (S) est incompatible (pas de solution), soit il admet une infinité de solutions.
- lorsque $n = p$, soit (S) est incompatible, soit il admet une infinité de solutions, soit il admet une unique solution.

Un système linéaire ne pourra par exemple jamais admettre exactement deux solutions (ni trois...).

2.2 Opérations élémentaires

Définition : on appelle **opérations élémentaires** les opérations suivantes sur les équations d'un système linéaire (S)
- $L_i \leftrightarrow L_j$ avec $i \neq j$ (échange des $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ équations)
- $L_i \leftarrow aL_i$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ (remplacement d'une équation par a fois l'équation, $a \neq 0$)
- $L_i \leftarrow L_i + bL_j$ avec $i \neq j$ et $b \in \mathbb{R}$ (ajout à la $i^{\text{ème}}$ équation de b fois la $j^{\text{ème}}$, avec $i \neq j$)

Propriétés :
- les opérations élémentaires transforment un système linéaire en un système équivalent.
- par conséquent, on garde un système équivalent à (S) (c'est-à-dire ayant le même ensemble de solutions que (S)) lorsque :
  - ▷ on échange deux équations ;
  - ▷ on multiplie une équation par un réel non nul ;
  - ▷ on remplace une équation par sa somme avec le produit d'une autre par un réel non nul ;
  - ▷ on fait $L_i \leftarrow aL_i + bL_j$ avec $i \neq j$ et $a \neq 0$ (on combine les deux dernières opérations élémentaires) ;
  - ▷ on supprime une équation nulle, c'est-à-dire de la forme $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_p = 0$

Exemples : à partir d'un même système (S), deux nouveaux systèmes équivalents

$$\begin{cases} x+y-z &= 3 \\ 2x+y+z &= 4 \\ x-y+2z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z &= 3 \\ 3x+2y &= 7 \\ 2x+z &= 3 \end{cases} \qquad (S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+z &= 4 \\ x+y-z &= 3 \\ -2x+2y-4z &= 0 \end{cases}$$

2.3 Systèmes échelonnés

Définitions :
- un système linéaire de n équations à p inconnues est dit **échelonné** si $n \leqslant p$ et si ses coefficients $a_{i,j}$ vérifient (pour $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, p]\!]$) : $a_{i,j} = 0$ lorsque $i > j$
- si $n = p$, le système échelonné est dit **triangulaire**, et les coefficients $a_{i,i}$ sont appelés **pivots**.

Remarques :
- la matrice d'un système triangulaire est triangulaire supérieure ;
- un système échelonné n'est pas toujours triangulaire.

Exemples :

1. $$(S_1)\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ \quad -x_2 + 2x_3 + x_4 &= 1 \\ \quad\quad x_3 - 9x_4 &= 5 \end{cases}$$

(S_1) est un système

2. $$(S_2)\begin{cases} x + 2y - z + t &= 3 \\ \quad 2y + 3z - t &= 0 \\ \quad\quad 5z + 3t &= 9 \\ \quad\quad\quad 4t &= 7 \end{cases}$$

(S_2) est un système

Méthode : un système échelonné se résout par substitution, en partant de la dernière équation. Eventuellement, certaines inconnues, dites **inconnues principales** seront exprimées en fonction des autres, dites **inconnues secondaires**.

Exemples : résoudre les systèmes suivants

1. $\left\{\begin{array}{rcl} x+3y-z & = & 2 \\ 2y+z & = & 1 \\ -2z & = & 2 \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1 \\ y+2z & = & 4 \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{rcl} x+y-z+2t & = & 0 \\ y+t-z & = & 0 \end{array}\right.$

2.4 Méthode du pivot de Gauss

Théorème :
1) tout système linéaire (S) peut être transformé par une succession d'opérations élémentaires en un système échelonné (S'), équivalent à (S)
2) dans le cas où (S) est un système carré de taille n, on peut donc transformer (S) en un système triangulaire (S'), équivalent à (S), par une succession d'opérations élémentaires.

Exemples : résolvons les systèmes suivants à l'aide de la méthode du pivot de Gauss.

On commence par choisir la ligne-pivot la plus adéquate, c'est-à-dire une ligne dans laquelle le coefficient de x (la première inconnue) soit non nul et le plus simple possible (idéalement 1 ou -1).

1. $(S) : \left\{\begin{array}{rcl} x+2y+3z & = & 2 \\ 3x+y+2z & = & 1 \\ 2x+3y+z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$S \Leftrightarrow$

$S \Leftrightarrow$

2. $(S) : \left\{\begin{array}{rcl} -2x+y+z & = & 1 \\ x-2y+z & = & -2 \\ x+y-2z & = & -1 \end{array}\right.$

$(S) \Leftrightarrow$

3. $(S) : \left\{\begin{array}{rcl} 6x+3y-9z & = & 0 \\ -2x-2y+2z & = & 0 \\ 2x-y-5z & = & 0 \end{array}\right.$

$(S) \Leftrightarrow$

3 Systèmes de Cramer

3.1 Définition et interprétation

Définition : soit (S) un système carré de n équations à n inconnues. On dit que le système est **de Cramer** lorsque (S) admet une unique solution (on dit aussi une unique matrice-colonne, à n lignes, qui soit solution).

On rappelle l'écriture matricielle d'un système (ici un système carré de taille n) :

$$(S) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases} \Leftrightarrow AX = B \text{ où } A = (a_{i,j}),\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Propriétés :

1) (S) est de Cramer si et seulement si A est inversible

2) si (S) est de Cramer, en notant $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ l'unique solution de (S), alors : $Z = A^{-1}B$

Démonstration :
alors
donc
Réciproquement, on admet que si (S) admet une unique solution, alors A est inversible.

3.2 Cas d'un système triangulaire

Propriété : un système triangulaire à n équations et n inconnues est de Cramer si et seulement si ses n pivots sont non nuls.

Soit (S) un système triangulaire à n équations :

$$(S) : \begin{cases} c_{1,1}x_1 + c_{1,2}x_2 + \ldots + c_{1,n}x_n &= d_1 \\ \qquad\quad c_{2,2}x_2 + \ldots + c_{2,n}x_n &= d_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots & \ \ \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\quad c_{n,n}x_n &= d_n \end{cases} \quad \text{alors } (S) \text{ est de Cramer} \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \quad c_{i,i} \neq 0$$

Incidemment, la propriété précédente nous donne une condition d'inversibilité sur les matrices triangulaires (inférieures ou supérieures en fait) :

Propriété : une matrice triangulaire (supérieure, ou inférieure) de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si ses n coefficients diagonaux sont non nuls.

3.3 Résolution, lien avec les matrices inversibles

3.3.1 Matrice inversible

Grâce à la méthode du pivot de Gauss, pour tout système (S) on peut trouver un système équivalent triangulaire (S'), donc en adoptant l'écriture matricielle :
$(S) : AX = B$ est de Cramer $\Leftrightarrow (S') : A'X = B'$ est de Cramer

or un système est de Cramer si et seulement si la matrice du système est inversible.

donc A inversible $\Leftrightarrow A'$ inversible
et rappelons que A' (qui est la matrice de S') est obtenue à partir d'opérations élémentaires sur (S) (c'est-à-dire sur A), donc

Propriété et définition : A est inversible si et seulement elle est « transformable » en une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont non nuls. Transformable signifie en réalisant des opérations élémentaires.
On appelle **réduite de** A une telle matrice (obtenue à partir d'opérations élementaires sur A).

Remarque : on peut donc montrer qu'une matrice est inversible ou non à partir d'opérations élémentaires sur ses lignes.

Exemples : montrer que A_1 est inversible et que A_2 n'est pas inversible

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

2. $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

3.3.2 Application au calcul de l'inverse d'une matrice inversible

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice.

Etant fixé $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ quelconque dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, notons (S) le système $AX = Y$, où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

On a donc $(S) : \left\{ \begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = y_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = y_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n = y_n \end{array} \right.$

Si A est inversible, d'après la propriété vue plus haut, le système $AX = Y$ admet pour unique solution la matrice-colonne $X = A^{-1}Y$

On voit alors que la résolution d'un système de Cramer de matrice A permet de calculer la matrice A^{-1}

Exemple : inverser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}$

Pour cela, on résout à l'aide du pivot de Gauss le système de Cramer :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z + t & = & x' \\ x + 2y + 3z + 4t & = & y' \\ x + 3y + 6z + 10t & = & z' \\ x + 4y + 10z + 20t & = & t' \end{array} \right.$$