

Résolution des systèmes linéaires

Exercice 1

Résoudre les systèmes suivants :

$$1. \begin{cases} -x + 2y - z = -5 \\ x - 4y + 2z = 7 \\ -2x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x - y + 4z = -1 \\ -x + 2y - 3z = 1 \\ x + 4y - z = 1 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x - y - z = 3 \\ x + 2z = -5 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x + y + z - 4t = -1 \\ 2x - 3y - 8z + 7t = 8 \\ x + 3y + 5z - 10t = -5 \\ 4x - y - 6z - t = 6 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ -x + y + z - t = 1 \\ x - y - z - t = 1 \\ x + y + z - t = 3 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} -a + b - c + d - e = 0 \\ -a - b + c - d + e = 0 \\ a - b + c - d - e = 0 \\ a - b + c - d - e = 0 \\ 2b - 2c + 2d - 2e = 0 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 2z - 2t + 8u = 0 \\ x + 2y + z + 5u = 0 \\ -2x - 4y - z - 8u = 0 \end{cases}$$

Exercice 2

Résoudre de tête les systèmes suivants :

$$1. \begin{cases} x + y + z = 4 \\ x - y + z = 1 \\ x - y - z = -2 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x + y + 5z - t = 2 \\ 2x - y + 5z = 3 \\ 2x + 2y + 5z = 4 \\ 2x + 5z = 5 \end{cases}$$

Systèmes linéaires à paramètres

Exercice 3

Soit m un paramètre réel, et soit (S) le système d'inconnues x, y, z suivant :

$$(S) : \begin{cases} (1 - m)x + y + z = 0 \\ x + (1 - m)y + z = 0 \\ x + y + (1 - m)z = 0 \end{cases}$$

Pour quelles valeurs de m le système (S) est-il de Cramer ?

Exercice 4

Soit m un paramètre réel, et soit (S) le système d'inconnues x, y, z suivant :

$$(S) : \begin{cases} (3 - m)x + z = 0 \\ x + (2 - m)y - z = 0 \\ x + (3 - m)z = 0 \end{cases}$$

Résoudre (S) suivant les valeurs de m

Inversion de matrice

Exercice 5

Soit A, B et C les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Résoudre les équations suivantes : $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $BX = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $CX = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Exercice 6

Inverser les matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$

4. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exemples d'applications

Exercice 7

Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}_3[X]$ vérifiant :

$$P(1) = 4 \quad P(-1) = 0 \quad P(-2) = -5 \quad P(2) = 15$$

Exercice 8

On considère la suite u définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 1 \\ u_2 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$$

On définit les matrices A et P suivantes : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}
2. On pose $D = P^{-1}AP$
 - a. Calculer D
 - b. Donner D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$
3. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $D^n = P^{-1}A^nP$, en déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, les coefficients de A^n
4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$
 - a. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$
 - b. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, une expression de X_n en fonction de A^n et X_0
 - c. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n en fonction de n