Quelques corrigés

Variables aléatoires discrètes

Exercice 1

On considère une urne contenant 3 boules numérotées de 1 à 3, dans laquelle on effectue une succession de 4 tirages d'une boule avec remise et l'on note X la variable aléatoire égale au numéro du tirage où, pour la première fois, on a obtenu un numéro supérieur ou égal au numéro précédent.
Pour tout k de $[\![1;4]\!]$, on note N_k la variable aléatoire égale au numéro obtenu au $k^{\text{ième}}$ tirage.

1. **a.** Exprimer l'événement $[X = 4]$ à l'aide d'événements faisant intervenir les variables N_1, N_2, N_3. En déduire $P(X = 4)$.

D'abord, $X(\Omega) = \{2, 3, 4\}$ car il faut avoir effectué au moins 2 tirages pour que X ait une valeur, et au cours de l'expérience, on effectue au maximum 4 tirages.
$[X = 4] = [N_1 > N_2 > N_3] \cap [N_4 \geqslant N_3] = [N_1 = 3] \cap [N_2 = 2] \cap [N_3 = 1] \cap [N_4 \geqslant 1]$ car, les numéros des boules étant $1, 2$ et 3, les numéros des boules tirées au cours des 3 premiers tirages sont en ordre strictement décroissant si et seulement si la première porte le numéro 3, la deuxième le numéro 2, et la troisième le numéro 1.
L'événement $[N_4 \geqslant 1]$ est certain, donc, $[X = 4] = [N_1 = 3] \cap [N_2 = 2] \cap [N_3 = 1]$, et par indépendance de ces trois événements (puisque les tirages s'effectuent avec remises, on répète trois fois de suite la même expérience), on a :

$$\begin{aligned} P(X = 4) &= P(N_1 = 3)P(N_2 = 2)P(N_3 = 1) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27} \end{aligned}$$

b. Montrer que $P(X = 2) = \dfrac{2}{3}$, et en déduire $P(X = 3)$.

$[X = 2]$ est l'événement : « on obtient pour la première fois un numéro supérieur ou égal au numéro précédent au $2^{\text{ième}}$ tirage ».
Le numéro de la $1^{\text{ère}}$ boule piochée valant $1, 2$ ou 3, les événements $[N_1 = 1]$, $[N_1 = 2]$ et $[N_1 = 3]$ forment un SCE, donc d'après la formule des probabilités totales , on a

$$P(X = 2) = P([X = 2]\cap[N_1 = 1])+P([X = 2]\cap[N_1 = 2])+P([X = 2]\cap$$

Mais

- $[X = 2] \cap [N_1 = 1] = ([N_1 = 1] \cap [N_2 = 1]) \cup ([N_1 = 1] \cap [N_2 = 2]) \cup ([N_1 = 1] \cap [N_2 = 3])$ donc par indépendance, puis incompatibilité, on a $P([X = 2] \cap [N_1 = 1]) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$
- $[X = 2] \cap [N_1 = 2] = ([N_1 = 2] \cap [N_2 = 2]) \cup ([N_1 = 2] \cap [N_2 = 3]$ donc par indépendance, puis incompatibilité, on a $P([X = 2] \cap [N_1 = 2]) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$
- Enfin, $[X = 2] \cap [N_1 = 3] = [N_1 = 3] \cap [N_2 = 3]$, et donc $P([X = 2] \cap [N_1 = 3]) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$, par indépendance des événements $[N_1 = 3]$ et $[N_2 = 3]$

Finalement, $P([X = 2] \cap [N_1 = 1]) = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$
Comme $X(\Omega) = \{2, 3, 4\}$, $P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 1$, et donc

$$P(X = 3) = 1 - P(X = 2) - P(X = 4) = 1 - \frac{1}{27} - \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$$

2. Calculer l'espérance de X

$E(X) = 2P(X = 2) + 3P(X = 3) + 4P(X = 4) = 2 \times \frac{2}{3} + 3 \times \frac{8}{27} + 4 \times \frac{1}{27} = \frac{64}{27}$

Exercice 3

Le service de dépannage d'un grand magasin dispose d'équipes intervenant sur appel de la clientèle. Pour des causes diverses les interventions ont lieu parfois avec un retard. On admet que les appels se produisent indépendamment les uns des autres et que, pour chaque appel, la probabilité d'un retard est $0,25$

1. Un client appelle le service à 4 reprises : soit X la variable aléatoire réelle égale au nombre de fois où il a subi un retard.

a. Déterminer la loi de probabilité de X

Il s'agit d'une loi binomiale qui compte le nombre de succès lors de 4 itérations indépendantes d'une même épreuve de Bernoulli (le « succès » étant le retard dont la probabilité est de $0,25$) : $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(4, \frac{1}{4}\right)$

donc pour $k \in [\![0,4]\!], P(X=k) = \binom{4}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{4-k}$

b. Calculer la probabilité de l'événement : « le client a subi au moins un retard ».

Cette événement s'écrit $P(X \geqslant 1) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$ ou encore

$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^4 = 1 - \frac{81}{254} = \frac{173}{254}$

2. Au cours des années 2005 et 2006 le service après-vente enregistre une succession d'appels. Le rang du premier appel pour lequel l'intervention s'effectue avec retard en 2005 (resp. 2006) définit une variable aléatoire réelle Y (resp. Z).

a. Déterminer les lois de Y et Z. Montrer qu'elles admettent une espérance et une variance et la calculer.

Il s'agit dans les deux cas de la même loi géométrique : rang d'apparition du premier « succès » (premier retard) lors de répétitions indépendantes d'une épreuve de Bernoulli.

Donc $Y \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\frac{1}{4}\right)$ et $Z \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\frac{1}{4}\right)$

et pour $n \in \mathbb{N}^*, P(Y=n) = P(Z=n) = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{4}\right)$

b. Calculer $P(Y \leqslant n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$[Y \leqslant n] = \bigcup_{k=1}^{n}[Y=k]$ donc par incompatibilité,

$$P(Y \leqslant n) = \sum_{k=1}^{n} P(Y=k) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} = \frac{1}{4} \times \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\frac{3}{4}}$$ d'après les résultats sur les sommes de termes d'une suite géométrique

donc $P(Y \leqslant n) = \frac{1}{4} \times \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\frac{1}{4}} = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$

c. On pose $T = \max(Y, Z)$. Calculer $P(T \leqslant n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire la loi de T

Avec $n \in \mathbb{N}^*$, pour que le maximum soit inférieur ou égal à n, il faut que les deux variables soit inférieures ou égales à n donc $[T \leqslant n] = [Y \leqslant n] \cap [Z \leqslant n]$ et de fait par indépendance $P(T \leqslant n) = P(Y \leqslant n) \times P(Z \leqslant n) = \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)^2$ pour $n \geqslant 2$, on en déduit alors

$P(T=n) = P(T \leqslant n) - P(T \leqslant n-1)$

donc $P(T=n) = \left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)^2 - \left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right)^2$

$$= \left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n - \left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right)\right)\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n + \left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right)\right)$$

$$= \left(\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)\left(2-\left(\frac{3}{4}\right)^n - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right)$$

donc $P(T=n) = \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\left(2-\left(\frac{3}{4}\right)^n - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right)$

cette formule est en fait également valable pour $n=1$, ou plus simplement $P(T=1)=P(T\leqslant 1)=\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^1\right)^2=\frac{1}{16}$

Exercice 5

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, une urne contient des jetons à deux faces :
- l'une des faces porte un numéro bleu, et l'autre porte un numéro rouge.
- on sait que pour chaque $i\in[\![1,n]\!]$ et chaque $j\in[\![1,i]\!]$, il y a dans l'urne exactement un jeton qui porte le numéro i bleu, et j rouge.
- il n'y a pas d'autre jeton dans l'urne.

On note N le nombre total de jetons dans l'urne.
On tire un jeton dans l'urne. Soit B la variable aléatoire qui donne le numéro bleu du jeton, et R la variable aléatoire qui donne le numéro rouge du jeton pioché.

1. Donner le nombre de jetons avec le 1 bleu, le 2 bleu, le 3 bleu, puis déterminer N

Prenons d'abord un exemple, supposons que $n=3$. Chaque jeton a un numéro bleu compris entre 1 et 3, et un numéro rouge (compris entre 1 et 3) inférieur ou égal au numéro bleu. Deux jetons ne peuvent porter les mêmes numéros bleu et rouge.
Il y a dans l'urne :
- un jeton portant le numéro 1 bleu et le numéro 1 rouge
- un jeton portant le numéro 2 bleu et le numéro 1 rouge
- un jeton portant le numéro 2 bleu et le numéro 2 rouge
- un jeton portant le numéro 3 bleu et le numéro 1 rouge
- un jeton portant le numéro 3 bleu et le numéro 2 rouge
- un jeton portant le numéro 3 bleu et le numéro 3 rouge

L'urne contient au total 6 jetons.
Revenons au cas général. L'urne contient :
- un jeton portant le numéro 1 bleu et le numéro 1 rouge
- 2 jetons portant le numéro 2 bleu (un portant le numéro 1 rouge, un autre portant le numéro 2 rouge)
- 3 jetons portant le numéro 3 bleu (un portant le numéro 1 rouge, un portant le numéro 2 rouge, et le dernier portant le numéro 3 rouge)
- $\vdots$
- n jetons portant le numéro n bleu (un portant le numéro 1 rouge, un portant le numéro 2 rouge,..., le dernier portant le numéro n rouge)

Au total il y a donc $1+2+3+\ldots+n$ jetons.
Ainsi $N=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$
On peut voir la situation avec une représentation triangulaire ou une matrice triangulaire inférieure ne comportant que des 1.

2. Soit $i\in[\![1,n]\!]$ et $j\in[\![1,n]\!]$. Déterminer $P\big([B=i]\cap[R=j]\big)$

Dans cette question, $1\leqslant i\leqslant n$, et $1\leqslant j\leqslant n$. Il n'est donc pas supposé que $j\leqslant i$.
$[B=i]\cap[R=j]$ est l'événement : « le jeton pioché a le numéro i bleu et le numéro j rouge. »
On a donc
- Si $j>i$, $[B=i]\cap[R=j]=\emptyset$ et donc $P([B=i]\cap[R=j])=0$
- Si $j\leqslant i$, $P([B=i]\cap[R=j])=\frac{1}{N}$ car il y a N jetons dans l'urne, et un seul qui porte le numéro i bleu et le numéro j rouge.

3. En déduire la loi de B, et la loi de R

Tout d'abord $R(\Omega)=[\![1,n]\!]$ et $B(\Omega)=[\![1,n]\!]$ car on voit bien qu'il y a des jetons dans l'urne portant chacun des numéros bleu possibles, et il y a des jetons dans l'urne portant chacun des numéros rouge possibles.
D'après la proposition 3.6 du cours, on sait donc que d'une part les événements
$[B=1],[B=2],\ldots,[B=n]$ forment un S.C.E, et que les événements $[R=1],[R=2],\ldots,[R=n]$ forment un S.C.E.
Donc d'après la formule des probabilités totales, on a, pour $i\in[\![1,n]\!]$:
$P(B=i)=\sum_{j=1}^{n}P([B=i]\cap[R=j])$ Or $\sum_{j=1}^{n}P([B=i]\cap[R=j])=\sum_{j=1}^{i}P([B=i]\cap[R=j])$ car pour $j<i$, $P([B=i]\cap[R=j])=0$.

Donc $P(B=i)=\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{N}=\underbrace{\frac{1}{N}+\ldots+\frac{1}{N}}_{i\text{ fois}}=\frac{i}{N}$

De même, on a pour $j\in[\![1,n]\!]$:

$P(R=j)=\sum_{i=1}^{n}P([B=i]\cap[R=j])=\sum_{i=j}^{n}P([B=i]\cap[R=j])$

donc $P(R=j)=\sum_{i=j}^{n}\frac{1}{N}=\underbrace{\frac{1}{N}+\ldots+\frac{1}{N}}_{n-j+1\text{ fois}}=\frac{n-j+1}{N}$

4. Déterminer l'espérance de B et de R

$E(B)=\sum_{i=1}^{n}iP(B=i)=\sum_{i=1}^{n}i\times\frac{i}{N}=\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{N}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{1}{N}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

donc $E(B)=\frac{2n+1}{3}$ en remplaçant N par $\frac{n(n+1)}{2}$

$E(R)=\sum_{j=1}^{n}jP(R=j)=\sum_{j=1}^{n}j\times\frac{n-j+1}{N}=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{n}\left((n+1)j-j^2\right)=\frac{n+1}{N}\sum_{j=1}^{n}j-\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{n}j^2$

Donc $E(R)=\frac{n+1}{N}\times\frac{n(n+1)}{2}-\frac{2n+1}{3}$ (en se servant du calcul précédent de $E(B)$).

Ce qui donne : $E(R)=\frac{(n+1)\times 2}{n(n+1)}\times\frac{n(n+1)}{2}-\frac{2n+1}{3}=n+1-\frac{2n+1}{3}=\frac{n+2}{3}$

Exercice 6

Une urne contient au départ une boule blanche et une boule noire. On effectue des tirages successifs d'une boule avec remise, jusqu'à l'obtention d'une boule noire, en ajoutant à chaque tirage une boule blanche supplémentaire.

On note X la variable aléatoire qui vaut 0 lorsqu'on n'obtient jamais la boule noire, et qui vaut le numéro du tirage amenant la boule noire, sinon.

1. Déterminer $X(\Omega)$

$X(\Omega)=\mathbb{N}$ car on peut ne jamais tirer la boule noire (dans ce cas X prend la valeur 0), et il n'y a pas de numéro de tirage de la boule noire qui soit maximal.

2. Déterminer, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $P(X=n)$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, fixé. Il faut exprimer l'événement $[X=n]$ à l'aide des événements :

B_k :« on obtient la boule blanche au $k^{\text{ième}}$ tirage ».

On a : $[X=n]=B_1\cap\ldots\cap B_{n-1}\cap\overline{B_n}$ (jusqu'au $(n-1)^{\text{ième}}$ tirage, on n'obtient que des boules blanches, et au $n^{\text{ième}}$ tirage on tire la boule noire).

On utilise ensuite la formule des probabilités composées pour le calcul de $P(X=n)$.

$P(X=n)=P(B_1)P_{B_1}(B_2)\ldots P_{B_1\cap\ldots\cap B_{n-2}}(B_{n-1})P_{B_1\cap\ldots B_{n-1}}(\overline{B_n})$

Or on a :

- $P(B_1)=\frac{1}{2}$, $P_{B_1}(B_2)=\frac{2}{3}$, $P_{B_1\cap B_2}(B_3)=\frac{3}{4}$
- $P_{B_1\cap\ldots\cap B_{n-2}}(B_{n-1})=\frac{n-1}{n}$
- $P_{B_1\cap\ldots B_{n-1}}(\overline{B_n})=\frac{1}{n+1}$

Ce qui donne : $P(X=n)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\ldots\times\frac{n-1}{n}\times\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$ par télescopage.

3. Montrer que $\sum_{k=1}^{+\infty}P(X=k)=1$

On va devoir justifier d'abord que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} P(X=n)$ converge.
Il s'agit de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n(n+1)}$. Astuce classique (généralement la question est guidée) : $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$
La série est donc une série télescopique. On peut revenir à la définition à la fois pour montrer que la série converge, et pour le calcul de la somme $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k)$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} P(X=n)$ (somme partielle d'indice n de la série). On a
$S_n = \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$ par télescopage.

Donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = 1$. Donc la série converge, et $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) = 1$

4. En déduire $P(X=0)$ et interpréter le résultat.

On nous demande enfin $P(X=0)$. On sait d'après le cours que $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) = 1$ puisque la suite d'événements $([X=n])_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un S.C.E. Or $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) = P(X=0) + \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k)$.

Mais on vient de voir que $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) = 1$, donc cela donne $1 = P(X=0)+1$, d'où $P(X=0)=0$
Cela veut dire qu'on obtient à coup sûr la boule noire en un nombre fini de tirages.

Lois usuelles

Exercice 12

Une urne contient 11 boules indiscernables numérotées de 1 à 11. On effectue n tirages successifs avec remise d'une boule dans l'urne. On note X la variable aléatoire dont la valeur est le nombre de tirages ayant amené une boule de numéro pair.

1. Donner la loi de X.

X suit une loi binomiale de paramètres n et p, avec p la probabilité de succès d'une épreuve de Bernoulli, soit ici la probabilité d'obtenir un numéro pair lors d'un tirage donné.
Il y a 11 boules dans l'urne, il y a 5 boules de numéro pair dans l'urne (boules numéro $2, 4, 6, 8$ et 10). Donc $p = \frac{5}{11}$. Donc $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, 5/11)$

2. X admet-elle une espérance ? Une variance ? Si oui, les calculer.

D'après le cours $E(X) = np = \frac{5n}{11}$ et $V(X) = npq = \frac{36n}{121}$

Exercice 13

En 2021, Gwendoline boit un jus de fruit frais tous les matins. Elle choisit chaque jour au hasard entre un jus de fraise, un jus de framboise, un jus de pomme, un jus d'ananas, un jus de pamplemousse et un jus d'orange. Soit X la variable aléatoire donnant le premier jour où elle choisit un jus de fruits rouges.

1. Donner la loi de X

La probabilité de choisir un jus de fruits rouges un jour donné est de $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Chaque jour, la même épreuve de Bernoulli se répète : Gwendoline choisit un jus de fruit, jus de fruits rouges avec une probabilité de $1/3$ (succès), ou autre jus de fruit (échec). La variable aléatoire X donne le rang d'apparition du premier succès, mais on ne peut rigoureusement écrire $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ si on se limite à l'année 2021. Il faut écrire $X(\Omega) = [\![1, 365]\!]$, ce qui correspond à une loi géométrique « tronquée ». Néanmoins, les probabilités ($X = k$ pour $k \geqslant 366$), de même que l'espérance et la variance seront très proches. On va donc poursuivre en considérant qu'X suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$

2. X admet-elle une espérance ? Une variance ? Si oui, les calculer.

Oui, d'après le cours : $E(X) = \frac{1}{p} = 3$ puisque ici $p = \frac{1}{3}$ et
$V(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{9}} = \frac{2}{3} \times 9 = 6$

Exercice 14

Soit n un entier tel que $n \geqslant 2$. On dispose d'une urne contenant n boules blanches et n boules noires, qui sont indiscernables au toucher.
On effectue dans cette urne deux tirages successifs d'une boule, sans remise.

- pour $k \in \{1, 2\}$, on note B_k l'événement : « on tire une boule blanche au $k^{\text{ième}}$ tirage » ;
- On note X la variable aléatoire qui vaut 1 si l'on obtient deux boules de même couleur, et 0 sinon.

1. Donner la loi de X.
Indication : On pourra commencer par exprimer les événements à l'aide de B_1 et B_2

Evidemment, $X(\Omega) = \{0, 1\}$.
$[X = 1]$ est l'événement : « on tire deux boules de même couleur », on a donc : $[X = 1] = (B_1 \cap B_2) \cup (\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2)$
Comme les événements $B_1 \cap B_2$ et $\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2$ sont incompatibles, on a : $P(X = 1) = P(B_1 \cap B_2) + P(\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2)$
donc $P(X = 1) = P(B_1)P_{B_1}(B_2) + P(\bar{B}_1)P_{\bar{B}_1}(\bar{B}_2)$
or $P(B_1) = \frac{1}{2}$ et $P_{B_1}(B_2) = \frac{n-1}{2n-1}$
de même $P(\bar{B}_1) = \frac{1}{2}$ et $P_{\bar{B}_1}(\bar{B}_2) = \frac{n-1}{2n-1}$
donc $P(X = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{n-1}{2n-1} + \frac{1}{2} \times \frac{n-1}{2n-1} = \frac{n-1}{2n-1}$
ainsi X suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{n-1}{2n-1}$

2. X admet-elle une espérance ? Une variance ? Si oui, les calculer.

Oui, d'après le cours : $E(X) = p = \frac{n-1}{2n-1}$ et
$V(X) = \frac{n-1}{2n-1} \times \left(1 - \frac{n-1}{2n-1}\right) = \frac{n-1}{2n-1} \times \frac{n}{2n-1} = \frac{n(n-1)}{(2n-1)^2}$

Exercice 15

Dans une équipe de handball et quand le match se joue à l'extérieur, une joueuse est désignée après la troisième mi-temps pour récupérer tous les sacs dans les chambres. La joueuse doit alors ouvrir 10 portes avec 10 clefs différentes.
Quand elle est ivre, elle mélange à nouveau les clefs après chaque essai. Sinon, elle retire la mauvaise clef du trousseau.
Soit X la variable aléatoire donnant le nombre d'essais nécessaires pour ouvrir la première porte quand elle est ivre.
Soit Y la variable aléatoire dont la valeur est le nombre d'essais qui lui sont nécessaires pour ouvrir la première porte lorsqu'elle est sobre.

1. **a.** Déterminer la loi de X

La même épreuve de Bernoulli est répétée successivement : la joueuse choisit une clef parmi les 10 clefs de son trousseau pour ouvrir la porte, il y a deux issues possibles : elle choisit la bonne clef et ouvre donc la porte (succès), ou bien elle ne choisit pas la bonne clef (échec). Le nombre d'essais nécessaires pour ouvrir la porte est donc le rang du premier succès. Donc X suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{10}$ (probabilité de choisir la bonne clef lors de l'épreuve de Bernoulli).

b. X admet-elle une espérance ? Une variance ? Si oui, les calculer.

Oui (cours) : $E(X) = 10$, $V(X) = 90$

2. **a.** Déterminer $Y(\Omega)$

Au minimum il lui faut 1 essai (elle ouvre la porte dès le premier essai), et au maximum 10 essais (elle essaie toutes les clefs avant de réussir). On a $Y(\Omega) = [\![1, 10]\!]$

b. Déterminer la loi de Y

Pour $k \in [\![1, 10]\!]$, on note : B_k : « elle ouvre la porte au $k^{\text{ième}}$ essai »
On a donc $[Y = k] = \bar{B}_1 \cap \ldots \cap \overline{B_{k-1}} \cap B_k$ D'après la formule des probabilités totales :

$$P(Y = k) = P(\bar{B}_1)P_{\bar{B}_1}(\overline{B_2}) \ldots P_{\bar{B}_1 \cap \ldots \cap \overline{B_{k-2}}}(\overline{B_{k-1}})P_{\bar{B}_1 \cap \ldots \cap \overline{B_{k-1}}}(B_k)$$

$P(\bar{B}_1) = \dfrac{9}{10}$ car 9 des 10 clefs du trousseau n'ouvrent pas la porte.
$P_{\bar{B}_1}(\overline{B_2}) = \dfrac{8}{9}$ car après avoir retiré la mauvaise clef, il reste au total 9 clefs, dont 8 qui ne conviennent pas.
$P_{\bar{B}_1 \cap \ldots \cap \overline{B_{k-2}}}(\overline{B_{k-1}}) = \dfrac{9-(k-2)}{10-(k-2)} = \dfrac{11-k}{12-k}$ car après avoir fait $k-2$ essais infructueux, le trousseau comporte $10-(k-2)$ clefs, dont $9-(k-2)$ qui ne conviennent pas.
$P_{\bar{B}_1 \cap \ldots \cap \overline{B_{k-1}}}(B_k) = \dfrac{1}{10-(k-1)} = \dfrac{1}{11-k}$ car après avoir fait $k-1$ essais infructueux, le trousseau comporte $10-(k-1)$ clefs, parmi lesquelles se trouve l'unique clef qui convient.
D'où $P(Y = k) = \dfrac{9}{10} \times \dfrac{8}{9} \times \ldots \times \dfrac{11-k}{12-k} \times \dfrac{1}{11-k} = \dfrac{1}{10}$ par télescopage (du produit).
On constate que Y suit la loi uniforme sur $[\![1, 10]\!]$

c. Y admet-elle une espérance ? Une variance ? Si oui, les calculer.

Donc d'après le cours, $E(Y) = \dfrac{1+10}{2} = \dfrac{11}{2}$ et $V(Y) = \dfrac{10^2-1}{12} = \dfrac{99}{12} = \dfrac{33}{4}$

3. a. Calculer $P(Y \geqslant 9)$

$[Y \geqslant 9] = [Y = 9] \cup [Y = 10]$ et les deux événements sont incompatibles, donc :
$P(Y \geqslant 9) = P(Y = 9) + P(Y = 10) = \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{10} = \dfrac{1}{5}$

b. Calculer $P(X \geqslant 9)$

Rappelons que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ donc $[X \geqslant 9] = \displaystyle\bigcup_{k=9}^{+\infty}[X = k]$.
Comme les événements $[X = k]$ sont deux à deux incompatibles, on a par additivité : $P(X \geqslant 9) = \displaystyle\sum_{k=9}^{+\infty} P(X = k)$
de plus, on sait que $P(X = k) = pq^{k-1}$ avec ici $p = \dfrac{1}{10}$,
donc $P(X = k) = \dfrac{1}{10} \times \left(\dfrac{9}{10}\right)^{k-1}$

$$\text{donc } P(X \geqslant 9) = \sum_{k=9}^{+\infty} \frac{1}{10} \times \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1} = \frac{1}{10}\sum_{k=9}^{+\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}$$
$$= \frac{1}{10}\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^{i+8}$$ (en faisant le changement d'indice $i = k-9$, qu'il faut faire avec les sommes partielles)

$$\text{donc } P(X \geqslant 9) = \frac{1}{10} \times \left(\frac{9}{10}\right)^8 \times \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^i$$
$$= \frac{1}{10} \times \left(\frac{9}{10}\right)^8 \times \frac{1}{1-\frac{9}{10}} = \frac{1}{10} \times \left(\frac{9}{10}\right)^8 \times 10 = \left(\frac{9}{10}\right)^8$$

c. Sachant qu'une fois sur 3, la joueuse désignée est ivre et qu'un jour elle a essayé au moins 9 clefs, quelle est la probabilité qu'elle ait été sobre ce jour-là ?

On note :
- S : « la joueuse est sobre »
- A : « la joueuse a essayé au moins 9 clefs »

On cherche à déterminer la probabilité conditionnelle $P_A(S)$.
On va utiliser la formule de Bayes $P_A(S) = \dfrac{P_S(A)P(S)}{P(A)}$
L'énoncé donne $P(\bar{S}) = \dfrac{1}{3}$ donc $P(S) = \dfrac{2}{3}$. D'après l'énoncé toujours, $P_S(A) = P(Y \geqslant 9)$. D'après la formule des probabilités totales $P(A) = P_S(A)P(S) + P_{\bar{S}}(A)P(\bar{S})$

avec $P_{\bar{S}}(A) = P(X \geqslant 9)$ d'après l'énoncé.
Il suffit ensuite de remplacer dans la formule de Bayes, ce qui donne $P_A(S) = \dfrac{\frac{2}{15}}{\frac{2}{15} + \frac{9^8}{3\times 10^8}} \simeq 0,481$

Exercice 17

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$

- on dispose de k urnes, contenant chacune n boules numérotées de 1 à n ;
- on tire une boule au hasard de chaque urne, et on note N_j le numéro de la boule tirée de l'urne j (avec $1 \leqslant j \leqslant k$) ;
- on note X_n la variable aléatoire dont la valeur est le plus grand des numéros N_j obtenus.

1. Déterminer $X_n(\Omega)$

$X_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$ car le plus grand numéro peut valoir n'importe quel nombre entre 1 et n, (les $k-1$ autres étant inférieurs ou égaux).

2. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, déterminer $P(X_n \leqslant i)$

En notant N_j, pour $j \in [\![1, n]\!]$, l'événement « la boule j porte le numéro N_J » l'événement recherché s'écrit :

$[X_n \leqslant i] = \bigcap_{j=1}^{k} [N_j \leqslant i]$ donc par indépendance mutuelle des tirages,

$$P(X_n \leqslant i) = \prod_{j=1}^{k} P(N_j \leqslant i)$$

or $\forall j \in [\![1, k]\!], P(N_j \leqslant i) = \dfrac{i}{n}$ (car étant donné $1 \leqslant i \leqslant n$, il y a i boules sur les n qui donnent un résultat inférieur ou égal à i, et tous les tirages sont équiprobables)

donc $P(X_n \leqslant i) = \displaystyle\prod_{j=1}^{k} \frac{i}{n} = \left(\frac{i}{n}\right)^k$

3. En déduire la loi de X_n

Comme à l'exercice **3.**, si $i \in [\![2, n]\!]$,

$$P(X_n = i) = P(X_n \leqslant i) - P(X_n \leqslant i-1) = \left(\frac{i}{n}\right)^k - \left(\frac{i-1}{n}\right)^k$$

donc $P(X_n = i) = \dfrac{i^k - (i-1)^k}{n^k}$
et cette formule est toujours valable pour $i = 1$, puisque $P(X_n = 1) = P(X_n \leqslant 1) = \left(\dfrac{1}{n}\right)^k$

Exercice plus difficile

Exercice 18

Soit $p \in [0,1]$
Une puce se déplace aléatoirement sur une droite d'origine O. A chaque instant, elle fait un bond d'une unité vers la droite avec une probabilité p ou d'une unité vers la gauche avec une probabilité de $q = 1 - p$.
A l'instant initial, la puce est à l'origine O
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note X_n la variable aléatoire réelle donnant l'abscisse de la puce à l'instant n

1. Déterminer $X_1(\Omega)$, $X_2(\Omega)$ et $X_3(\Omega)$

Après le premier saut, la puce peut se trouver en -1 ou en 1 donc $X_1(\Omega) = \{-1; 1\}$
ensuite après le deuxième saut, la puce peut se trouver en -2, en 0 ou en 2 donc $X_2(\Omega) = \{-2; 0; 2\}$
et de fait $X_3(\Omega) = \{-3; -1; 1; 3\}$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire D_n qui compte le nombre de bonds effectués vers la droite à l'instant n, et G_n la variable aléatoire qui donne le nombre de bonds effectués vers la gauche à l'instant n

a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que D_n et G_n suivent des lois usuelles.

D_n compte le nombre de sauts vers la droite parmi les n sauts réalisés, on peut donc assimiler cela à une loi binomiale, il s'agit de la répétition d'une épreuve de Bernoulli dont le paramètre de succès (saut vers la droite) vaut p, et cela de manière indépendante : donc $D_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$
et de même $G_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n, 1-p)$

b. Exprimer X_n en fonction de D_n et G_n

Par définition X_n est égal au nombre de sauts vers la droite moins le nombre de sauts vers la gauche, donc $X_n = D_n - G_n$

c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, que vaut $D_n + G_n$?

Un saut s'effectue soit vers la droite, soit vers la gauche (et pas les deux en même temps), donc $D_n + G_n$ correspond au nombre total de sauts : $D_n + G_n = n$

d. En déduire l'expression de X_n à l'aide de D_n seulement.

D'après **2.b.**, $X_n = D_n - G_n$
or d'après **2.c.**, $D_n + G_n = n \Rightarrow G_n = n - D_n$
donc $X_n = D_n - (n - D_n) = 2D_n - n$

e. Déterminer la loi de X_n

D'après la question précédente, comme $D_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$, on en déduit que $X_n(\Omega) \subset [\![-n, n]\!]$
de plus pour $k \in [\![0, n]\!], [D_n = k] \Leftrightarrow [X_n = 2k - n]$
de fait $X_n(\Omega) = \{2n - k, k \in [\![0, n]\!]\}$
de plus $P(D_n = k) \Leftrightarrow P(X_n = 2k - n)$
donc pour $k \in [\![0, n]\!], P(X_n = 2k - n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
on retrouve au passage les résultats de la première question, si n est impair, X_n ne prend que des valeurs impaires et si n est pair, X_n ne prend que des valeurs paires.

3. Déterminer l'espérance de X_n

Par linéarité de l'espérance, $E(X_n) = 2E(D_n) - n$ (n étant fixé)
or $E(D_n) = np$ car $D_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$
donc $E(X_n) = 2 \times np - n = n(2p - 1)$ on peut chercher à interpréter ce résultat : on voit que si $p \geqslant \dfrac{1}{2}$, alors l'espérance est positive, ce qui est logique ; on a alors plus de chance d'aller vers la droite, ce qui se retrouve en moyenne au bout de n sauts. Dans les cas extrêmes $p = 0$ ou $p = 1$, on trouve aussi logiquement $E(X_n) = -n$ ou $E(X_n) = n$ (tous les sauts s'effectuent vers la gauche ou vers la droite).

4. Déterminer la variance de X_n

De même, $V(X_n) = V(2D_n - n)$
donc par propriété $V(X_n) = 2^2 V(D_n)$
or $V(D_n) = np(1-p)$ (loi binomiale) donc $V(X_n) = 4np(1-p)$

Exercices-type des sujets de devoir

Exercice 19

Soit $p \in]0,1[$
On considère une urne initialement vide, et une pièce dont la probabilité d'obtenir pile après un lancer vaut p
On effectue une suite de lancers indépendants de la pièce. A chaque lancer de la pièce :
- si on obtient pile, on ajoute une boule dans l'urne.
- si on obtient face, on vide l'urne.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit X_n la variable aléatoire qui donne le nombre de boules dans l'urne après le $n^{\text{ième}}$ lancer de la pièce.
- On convient que X_0 vaut constamment 0
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit Y_n la variable aléatoire qui vaut 1 si on obtient face au $n^{\text{ième}}$ lancer, et qui vaut 0 sinon.
- On note T la variable aléatoire qui donne le nombre de lancers nécessaires pour obtenir face pour la première fois.

1. a. Reconnaître la loi de Y_i (pour $i \in \mathbb{N}^*$), préciser son espérance et sa variance.

$\forall i \in \mathbb{N}^*, Y_i$ suit une loi de Bernoulli car elle ne prend que les valeurs 0 et 1 et plus précisément le paramètre de « succès » vaut $q = 1-p$ (probabilité de faire face),
donc $\forall i \in \mathbb{N}^*, Y_i \hookrightarrow \mathscr{B}(1-p)$
de fait, d'après les résultats du cours,
$\forall i \in \mathbb{N}^*, E(Y_i) = 1-p$ et $V(Y_i) = qp = (1-p)p = p - p^2$

b. Reconnaître la loi de T, préciser son espérance et sa variance

Il s'agit d'une loi géométrique : T donne le rang d'apparition du premier « succès » (faire face) lors de répétitions indépendantes d'une même épreuve de Bernoulli, donc $T \hookrightarrow \mathscr{G}(1-p)$
de fait, d'après les résultats du cours,
$E(T) = \dfrac{1}{1-p}$ et $V(T) = \dfrac{p}{(1-p)^2}$

2. a. Justifier que pour $n \in \mathbb{N}^*, X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$

X_n donne le nombre de boules dans l'urne après n lancers de la pièce. Comme il n'y a aucune boule dans l'urne au début de l'expérience et qu'une boule est ajoutée à chaque fois que l'on fait pile, il y aura au minimum aucune boule (tous les lancers ont donné face) et au maximum n boules (tous les lancers ont donné pile). De plus, toutes les valeurs intermédiaires peuvent être atteintes car $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, si les $n-i$ premiers lancers donnent face puis les i suivants donnent pile, alors $X_n = i$
donc $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$

b. Donner la loi de X_1

D'après la question précédente, $X_1(\Omega) = [\![0;1]\!] = \{0;1\}$
de plus $P(X_1 = 0) = q = 1-p$, c'est la probabilité que le (premier) lancer ait donné face ;
et $P(X_1 = 1) = p$, c'est la probabilité que le (premier) lancer ait donné pile.

c. Justifier que $P(X_n = 0) = 1 - p$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$)

Par définition, $[X_n = 0]$ signifie qu'il n'y a aucune boule dans l'urne après le $n^{\text{ième}}$ lancer, ce qui est la même chose que « le $n^{\text{ième}}$ lancer a donné face »
autrement dit $[X_n = 0] \Leftrightarrow [Y_n = 1]$ donc $P(X_n = 0) = 1 - p$

d. Calculer $P(X_n = n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

Par définition, $[X_n = n]$ signifie qu'il y a n boules dans l'urne après le $n^{\text{ième}}$ lancer, c'est-à-dire que les n lancers ont donné pile.

autrement dit $[X_n = n] = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} [Y_i = 0]$

donc $P(X_n = n) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} P(Y_i = 0)$ par indépendance des lancers

donc $P(X_n = n) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} p = p^n$

3. a. Montrer que
$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in [\![1, n+1]\!], P(X_{n+1} = k) = pP(X_n = k-1)$

D'après la formule de base $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$
$P(X_{n+1} = k) = P([X_{n+1} = k] \cap [X_n = k-1]) + P([X_{n+1} =$

$k] \cap \overline{[X_n = k-1]})$

or $\overline{[X_n = k-1]} = [X_n \neq k-1]$ donc $P\left([X_{n+1} = k] \cap \overline{[X_n = k-1]}\right)$ car il est impossible d'avoir k boules après le $n^{\text{ième}}$ lancer s'il n'y en avait pas $k-1$ au lancer précédent (un lancer ne fait qu'ajouter une boule ou vider l'urne)

donc $P(X_{n+1} = k) = P([X_{n+1} = k] \cap [X_n = k-1])$
$= P(X_n = k-1)P_{[X_n=k-1]}(X_{n+1} = k)$
$= P(X_n = k-1)p$ car $P_{[X_n=k-1]}(X_{n+1} = k) = p$

car pour augmenter d'une boule le contenu de l'urne entre les lancers n et $n+1$, il faut avoir fait pile au $n+1^{\text{ième}}$ lancer.

b. En déduire que
$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![0, n-1]\!], P(X_n = k) = p^k(1-p)$

On procède par récurrence sur n (l'assertion $P(n)$ contient $n-1$ égalités), pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $P(n)$: $\forall k \in [\![0, n-1]\!], P(X_n = k) = p^k(1-p)$

Initialisation : $P(1)$ est définie par $\forall k \in [\![0, 0]\!], P(X_1 = k) = p^k(1-p) \Leftrightarrow P(X_1 = 0) = p^0(1-p) = 1-p$ ce qui est vrai comme nous l'avons vue plus haut donc $P(1)$ est vraie

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $P(n)$ est vraie
soit $k \in [\![0, n]\!]$

1er cas : si $k = 0$ alors
$P(X_{n+1} = k) = P(X_{n+1} = 0) = 1-p$ d'après **2.c.**
par ailleurs $p^0(1-p) = 1-p$ donc l'égalité est vérifiée

2ème cas : si $k > 0$ alors
d'après la question précédente, $P(X_{n+1} = k) = pP(X_n = k-1)$
donc par hypothèse $P(X_{n+1} = k) = pp^{k-1}(1-p) = p^k(1-p)$
finalement $\forall k \in [\![0, n]\!], P(X_{n+1} = k) = p^k(1-p)$
i.e. $P(n+1)$ est vraie, d'où l'hérédité
donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie

c. Vérifier, uniquement à l'aide des formules donnant $P(X_n = k)$ pour $k \in [\![0, n]\!]$, que, pour $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) = 1$

Attention la formule $P(X_n = k)$ n'est pas la même si $k = n$ et $k < n$, donc on va couper la somme :

$$\sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X_n = k) + P(X_n = n)$$

donc d'après la question précédente et **2.d.** :

$$\sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) = \sum_{k=0}^{n-1} p^k(1-p) + p^n$$
$$= (1-p)\sum_{k=0}^{n-1} p^k + p^n$$
$$= (1-p)\frac{1-p^n}{1-p} + p^n$$ d'après la formule sur la somme des termes d'une suite géométrique

donc $\sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) = 1 - p^n + p^n = 1$

4. a. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} = \frac{(n-1)p^n - np^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$$

On procède par récurrence, pour $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$, on définit $Q(n)$: $\sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} = \frac{(n-1)p^n - np^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$

Initialisation :

$Q(2)$ est vraie $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{2-1} kp^{k-1} = \frac{(2-1)p^2 - 2p^{2-1} + 1}{(1-p)^2} \Leftrightarrow 1p^{1-1} = \frac{p^2 - 2p + 1}{(1-p)^2} \Leftrightarrow 1 = \frac{(1-p)^2}{(1-p)^2} \Leftrightarrow 1 = 1$ ce qui est vrai, donc $Q(2)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$, on suppose que $Q(n)$ est vraie

alors $\sum_{k=1}^{n+1-1} kp^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} kp^{k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} + np^{n-1}$

or par hypothèse $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} = \frac{(n-1)p^n - np^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$

$$\begin{aligned}
\text{donc } \sum_{k=1}^{n} kp^{k-1} &= \frac{(n-1)p^n - np^{n-1} + 1}{(1-p)^2} + np^{n-1}\\
&= \frac{(n-1)p^n - np^{n-1} + 1 + (1-p)^2 \times np^{n-1}}{(1-p)^2}\\
&= \frac{(n-1)p^n - np^{n-1} + 1 + np^{n-1} - 2np^n + np^{n+1}}{(1-p)^2}\\
&= \frac{(n-1-2n)p^n + np^{n+1} + 1}{(1-p)^2}\\
&= \frac{(-n-1)p^n + np^{n+1} + 1}{(1-p)^2}\\
&= \frac{np^{n+1} - (n+1)p^n + 1}{(1-p)^2}
\end{aligned}$$

donc $Q(n+1)$ est vraie, d'où l'hérédité
donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2, Q(n)$ est vraie

b. En déduire que $E(X_n) = \dfrac{p(1-p^n)}{1-p}$

Par définition de l'espérance, $E(X_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} kP(X_n = k)$

$$\begin{aligned}
\text{donc } E(X_n) &= 0 \times P(X_n = 0) + \sum_{k=1}^{n-1} kP(X_n = k) + nP(X_n = n)\\
&= \sum_{k=1}^{n-1} kp^k(1-p) + nP(X_n = n)\\
&= (1-p)p\sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} + nP(X_n = n)
\end{aligned}$$

donc d'après la question précédente et **2.d.**

$$E(X_n) = (1-p)p\frac{(n-1)p^n - np^{n-1} + 1}{(1-p)^2} + np^n$$

$$\begin{aligned}
E(X_n) &= \frac{p\left((n-1)p^n - np^{n-1} + 1\right)}{1-p} + np^n\\
&= \frac{(n-1)p^{n+1} - np^n + p + (1-p)np^n}{1-p}\\
&= \frac{(n-1)p^{n+1} - np^n + p + np^n - np^{n+1}}{1-p}\\
&= \frac{(n-1-n)p^{n+1} + p}{1-p} = \frac{-p^{n+1} + p}{1-p} = \frac{p - p^{n+1}}{1-p}
\end{aligned}$$

donc $E(X_n) = \dfrac{p(1-p^n)}{1-p}$

Exercice 20 *Notation utilisée lors d'un D.L. : total sur 16 points*

Une urne contient des boules blanches et des boules noires. La proportion de boules blanches est p et la proportion de boules noires est q
Ainsi, on a : $0 < p < 1, 0 < q < 1$, et $p + q = 1$

Partie I

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu une boule noire.
On note T la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués et U la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Reconnaitre la loi de T. Pour tout entier $k \geqslant 1$, donner $P(T = k)$ et rappeler l'espérance et la variance de T *1 point*

   T suit une loi géométrique de paramètre q car cette variable correspond au rang d'apparition du premier succès (l'obtention d'une boule blanche) au cours de répétitions d'une même épreuve de Bernoulli, de manière indépendante (tirage avec remise).
   donc $\forall k \geqslant 1, P(T = k) = p^{k-1}q$ et $E(T) = \dfrac{1}{q}$ et $V(T) = \dfrac{p}{q^2}$

2. En déduire que U admet une espérance et une variance. Déterminer $E(U)$ et $V(U)$ *1,5 points*

   Par définition des variables U et $T, U = T - 1$ (le nombre de boules blanches est égal au nombre de tirages avant l'apparition de la boule noire)
   donc par linéarité de l'espérance : $E(U) = E(T) - 1 = \dfrac{1}{q} - 1 = \dfrac{1-q}{q} = \dfrac{p}{q}$ (car $p + q = 1 \Rightarrow p = 1 - q$) et
   par propriété $(V(aX + b) = a^2V(X))$, la variance est inchangée par ce type d'opération, donc $V(U) = V(T) = \dfrac{p}{q^2}$

Partie II

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu au moins une boule blanche et au moins une boule noire.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
On note Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.
On note Z la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues.
Ainsi, on peut remarquer que la probabilité de l'événement $[Y = 1] \cup [Z = 1]$ est égale à 1
Pour tout entier naturel non nul i, on note :

- B_i l'événement « la $i^{\text{ème}}$ boule tirée est blanche » ;
- N_i l'événement « la $i^{\text{ème}}$ boule tirée est noire ».

1. **a.** Montrer, pour tout entier $k \geqslant 2, P(X = k) = qp^{k-1} + pq^{k-1}$*1,5 points*

   On remarque d'abord que $[X = k]$ peut-être réalisé de deux manières : soit en obtenant $k - 1$ boules blanches puis une noire, soit en obtenant $k - 1$ boules noires puis une blance
   pour le justifier, on peut écrire $P(X = k) = P([X = k] \cap B_1) + P([X = k] \cap \overline{B_1})$ (propriété de base des probabilités), puisque la première boule tirée détermine toute la suite
   or $[X = k] \cap B_1 = B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k}$ (on est dans le cas « que des blanches puis une noire »)
   et $[X = k] \cap \overline{B_1} = \overline{B_1} \cap \cdots \cap \overline{B_{k-1}} \cap B_k$ (le cas inverse)
   donc par indépendance mutuelle des tirages (qui sont effectués avec remise) :
   $P([X = k] \cap B_1) = P(B_1) \times \cdots \times P(B_{k-1}) \times P(\overline{B_k}) = p^{k-1}q$
   et $P\left([X = k] \cap \overline{B_1}\right) = P(\overline{B_1}) \times \cdots \times P(\overline{B_{k-1}}) \times P(B_k) = q^{k-1}p$
   et finalement $P(X = k) = p^{k-1}q + q^{k-1}p$

   b. Que doit valoir $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} P(X = k)$? Vérifier. *2 points*

   $X(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$ car il faut au moins deux tirages pour obtenir deux boules de couleurs différentes et théoriquement cela peut se produire pour la première fois à n'importe quel tirage à partir du deuxième.

donc on s'attend à trouver $\sum_{k=2}^{+\infty} P(X=k)=1$, ce que l'on va vérifier

pour $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$, d'après la question précédente : $\sum_{k=2}^{n} P(X=k)=\sum_{k=2}^{n}\left(p^{k-1} q+q^{k-1} p\right)$

donc $\sum_{k=2}^{n} P(X=k)=\sum_{k=2}^{n} p^{k-1} q+\sum_{k=2}^{n} p q^{k-1}=q \sum_{k=2}^{n} p^{k-1}+p \sum_{k=2}^{n} q^{k-1}=\frac{q}{p} \sum_{k=2}^{n} p^{k}+\frac{p}{q} \sum_{k=2}^{n} q^{k}$ or $\sum_{k=2}^{n} p^{k}$ et $\sum_{k=2}^{n} q^{k}$ sont les sommes partielles de deux séries géométriques convergentes (car $0<p<1$ et $0<q<1$) et de plus $\sum_{k=0}^{+\infty} p^{k}=\frac{1}{1-p}=\frac{1}{q}$ (car $q=1-p$) donc $\sum_{k=2}^{+\infty} p^{k}=\frac{1}{q}-1-p$ (on retranche les deux premiers termes) et de même $\sum_{k=2}^{+\infty} p^{k}=\frac{1}{p}-1-q$

donc $\sum_{k=2}^{+\infty} P(X=k)=\frac{q}{p}\left(\frac{1}{q}-1-p\right)+\frac{p}{q}\left(\frac{1}{p}-1-q\right)=\frac{1}{p}-\frac{q}{p}-q+\frac{1}{q}-\frac{p}{q}-p=\frac{(1-q)}{p}+\frac{(1-p)}{q}-(p+q)=\frac{p}{p}+\frac{q}{q}-1$

$$=1+1-1=1 \quad \text{(on a utilisé } p+q=1)$$

c. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que : $E(X)=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1$ *2 points*

Par définition X admet une espérance si $\sum_{k \geqslant 2} k P(X=k)$ converge

or pour $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$, d'après **1.a.** :

$$\sum_{k=2}^{n} k P(X=k)=\sum_{k=2}^{n} k\left(p^{k-1} q+q^{k-1} p\right)$$

donc $\sum_{k=2}^{n} P(X=k)=\sum_{k=2}^{n} k p^{k-1} q+\sum_{k=2}^{n} k p q^{k-1}$

$$=q \sum_{k=2}^{n} k p^{k-1}+p \sum_{k=2}^{n} k q^{k-1}$$

or $\sum_{k=2}^{n} k p^{k-1}$ et $\sum_{k=2}^{n} q^{k-1}$ sont les sommes partielles de deux séries géométriques dérivées convergentes (car $0<p<1$ et $0<q<1$) et de plus $\sum_{k=1}^{+\infty} k p^{k-1}=\frac{1}{(1-p)^{2}}=\frac{1}{q^{2}}$ (car $q=1-p$)

donc $\sum_{k=2}^{+\infty} p^{k}=\frac{1}{q^{2}}-1$ (on retranche le premier terme) et de même $\sum_{k=2}^{+\infty} p^{k}=\frac{1}{p^{2}}-1$

donc $\sum_{k \geqslant 2} k P(X=k)$ converge et $\sum_{k=2}^{+\infty} k P(X=k)=q\left(\frac{1}{q^{2}}-1\right)+p\left(\frac{1}{p^{2}}-1\right)=\frac{1}{q}+\frac{1}{p}-p-q=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1$

2. **a.** Pour tout entier $k \geqslant 2$, déterminer $P([X=k] \cap[Y=1])$ *(on distinguera les cas $k=2$ et $k \geqslant 3$)* *2 points*

Comme suggéré, nous allons distinguer deux cas

<u>1</u>

1er cas : $k=2$, alors $P([X=k] \cap[Y=1])=P([X=2] \cap[Y=1])$

et on cherche donc la probabilité que les deux couleurs aient été obtenues pour la première fois au deuxième tirage et qu'au total une seule blanche ait été tirée.

donc avec les notations de l'énoncé $P([X=2] \cap[Y=1])=P(B_{1} \cap N_{2})+P(N_{1} \cap B_{2})$ (une blanche tirée en premier puis une noire ou l'inverse)

donc $P([X=2] \cap[Y=1])=p q+q p=2 p q$

<u>$2^{\text{ème}}$ cas</u> : $k \geqslant 3$ alors l'événement $[X = k] \cap [Y = 1]$ signifie que les deux couleurs ont été obtenues pour la première fois au $k^{\text{ième}}$ tirage et qu'une seule boule blanche a été tirée
comme $Y = 1$, cela implique que $k - 1$ boules noires ont été tirées et comme $k \geqslant 3$ alors $k - 1 \geqslant 2$, donc au moins deux boules noires ont été tirées et donc la boule blanche a été forcément été tirée en dernier (sinon cela contredirait $X = k$)
donc ici, $[X = k] \cap [Y = 1] = N_1 \cap \ldots N_{k-1} \cap B_k$ et par indépendance mutuelle des tirages,
$P([X = k] \cap [Y = 1]) = P(N_1) \ldots P(N_{k-1}) P(B_k) = q^{k-1}p$

b. En déduire $P(Y = 1) = q(1 + p)$ *2 points*

Comme $X(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$, la famille d'événement $([X = k])_{k \in [\![2,+\infty[\![}$ forme un système complet d'événements et d'après la formule des probabilités totales (version infinie) :

$$P(Y = 1) = \sum_{k=2}^{+\infty} P([X = k] \cap [Y = 1]) = P([X = 2] \cap [Y = 1]) + \sum_{k=3}^{+\infty} P([X = k] \cap [Y = 1]) = 2pq + \sum_{k=3}^{+\infty} pq^{k-1}$$ d'après les résultats trouvés à la question précédente

or $$\sum_{k=3}^{+\infty} pq^{k-1} = p \sum_{k=3}^{+\infty} q^{k-1} = \frac{p}{q} \sum_{k=3}^{+\infty} q^k = \frac{p}{q}\left(\frac{1}{1-q} - 1 - q - q^2\right) = \frac{p}{q}\left(\frac{1}{p} - 1 - q - q^2\right) = \frac{1}{q} - \frac{p}{q} - p - pq = \frac{1-p}{q} - p - pq$$

$$= 1 - p - pq = q - pq$$

(on a utilisé $p + q = 1$ ou $1 - p = q$ ou $1 - q = p$)
il s'agit de la même série géométrique qu'au **1.b.**, mais il faut cette fois enlever les trois premiers termes
donc $P(Y = 1) = 2pq + q - pq = pq + q = q(p + 1)$

c. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y *1 point*

Y peut prendre toutes les valeurs possibles à partir de 1, car pour que l'expérience s'arrête il faut avoir tiré au moins une boule de chaque couleur et donc au moins une blanche (ce qui est un cas réalisable comme vu plus haut). Ensuite toutes les valeurs entières sont théoriquement possibles, donc $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$
Par ailleurs comme vu précédemment,
$P(Y = 1) = q(p + 1)$ et pour $k \geqslant 2, [Y = k] = B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap B_k \cap \overline{B_{k+1}} = \left(\bigcap_{i=1}^{k} B_i\right) \cap \overline{B_{k+1}}$ (s'il y au moins deux boules blanches ont été tirées, cela signifie que le tirage a commencé par des blanches jusqu'à l'obtention d'une boule noire). donc par indépendance mutuelle, $P(Y = k) = \left(\prod_{i=1}^{k} P(B_i)\right) \cap P(\overline{B_{k+1}}) = p^k q$

3. Donner la loi de Z *1 point*

On peut remarquer que Y et Z sont des variables aléatoires analogues, mais comme Z compte le nombre de boules noires, il suffit d'interchanger p et q dans les formules trouvées pour Y
donc $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $P(Z = 1) = p(q+1)$ et $\forall k \geqslant 2, P(Z = k) = pq^k$

4. Montrer que la variable aléatoire $X - 1$ est égale à la variable aléatoire YZ (produit des variables aléatoires Y et Z). *1 point*

On peut remarquer dans un premier temps que pour $k \in \mathbb{N}^*, [X - 1 = k] \Leftrightarrow [X = k + 1] \Leftrightarrow ([Y = k] \cap [Z = 1]) \cup ([Y = 1] \cap [Z = k])$
donc

<u>1^{er} cas</u> : $Y = 1$ et $Z = k$ alors $YZ = k = X - 1$

<u>$2^{\text{ème}}$ cas</u> : $Y = k$ et $Z = 1$ alors $YZ = k = X - 1$

5. En déduire l'espérance de la variable aléatoire YZ *1 point*

$YZ = X - 1$ donc $E(YZ) = E(X - 1) = E(X) - 1$ par linéarité de l'espérance
or $E(X) = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - 1$ donc $E(YZ) = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - 2$