Les réponses doivent être justifiées, si c'est du cours, on le mentionne. *1 point par question*

1. Que vaut $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{-2}{3}\right)^{k-1}$? $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{-2}{3}\right)^{k-1} = \frac{1}{\left(1-\left(-\frac{2}{3}\right)\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{5}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{25}{9}} = \frac{9}{25}$

Il s'agit de la série géométrique « dérivée » (avec $|q| = \dfrac{2}{3} < 1$)

2. Que vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-3)^k}{k!}$? $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-3)^k}{k!} = e^{-3}$, il s'agit de la série exponentielle.

3. X est une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$, donner la définition de l'espérance de X

X admet une espérance si la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} kP(X=k)$ converge

dans ce cas l'espérance vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} kP(X=k)$ et est notée $E(X)$

4. On lance deux dés à six faces, un rouge et un bleu. X est la variable aléatoire égale à la différence des deux chiffres obtenus (chiffre du dé rouge moins chiffre du dé bleu). Que vaut $X(\Omega)$?

Les valeurs extrêmes correspondent à $1-6=-5$ et $6-1=5$ et toutes les valeurs sont atteintes, donc $X(\Omega) = [\![-5, 5]\!]$

5. Un dé comporte 5 faces avec le numéro 1 et une face avec le numéro 4. On note X la variable aléatoire correspondant au numéro obtenu lors d'un lancer. Que vaut $E(X)$?

On commence par préciser la loi de X : d'une part $X(\Omega) = \{1, 4\}$, d'autre part $P(X=1) = \dfrac{5}{6}$ et $P(X=4) = \dfrac{1}{6}$ donc $E(X) = 1\times\dfrac{5}{6} + 4\times\dfrac{1}{6} = \dfrac{9}{6} = \dfrac{3}{2}$

6. X est une variable aléatoire dont l'espérance vaut 4. Que vaut $E(5X-3)$?

On utilise la linéarité de l'espérance : $E(5X-3) = 5E(X) - 3 = 17$

7. X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[\![6, 15]\!]$, que vaut $P(X=11)$?

Toutes les valeurs prises par la variable aléatoire sont équiprobables avec une probabilité $\dfrac{1}{10}$ car il y a 10 valeurs. Donc $P(X=11) = \dfrac{1}{10}$

8. Que vaut l'espérance d'une loi binomiale de paramètres $n=12$ et $p=\dfrac{1}{3}$?

Par propriété sur les variables aléatoires suivant la loi binomiale : $E(X) = np = 12\times\dfrac{1}{3} = 4$

9. X est une variable aléatoire et $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, que vaut $P(X=10)$?

Par propriété de la loi géométrique $P(X=10) = pq^9 = p(1-p)^9$ (correspond à 9 échecs, puis un succès)

10. Avec Python, créer une fonction qui renvoie 0 avec la probabilité $\dfrac{1}{6}$ et 1 avec la probabilité $\dfrac{5}{6}$

```
import random as rd
def alea():
  a=rd.randint(1,6)
  if a<6 :
    return 1
  else :
    return 0
```

ECG 1 - maths appliquées **Interrogation rapide** **2 avril 2025**

Les réponses doivent être justifiées, si c'est du cours, on le mentionne. *1 point par question*

1. Que vaut $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{7}{8}\right)^{k-1}$? $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{7}{8}\right)^{k-1} = \frac{1}{\left(1-\frac{7}{8}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{8}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{64}} = 64$

Il s'agit de la série géométrique « dérivée » (avec $|q| = \dfrac{7}{8} < 1$)

2. Que vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-5)^k}{k!}$? $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-5)^k}{k!} = e^{-5}$, il s'agit de la série exponentielle.

3. X est une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$, donner la définition de l'espérance de X

X admet une espérance si la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} kP(X=k)$ converge

dans ce cas l'espérance vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} kP(X=k)$ et est notée $E(X)$

4. On lance deux dés à six faces, un rouge et un bleu. X est la variable aléatoire égale à la différence des deux chiffres obtenus (chiffre du dé rouge moins chiffre du dé bleu). Que vaut $X(\Omega)$?

Les valeurs extrêmes correspondent à $1-6=-5$ et $6-1=5$ et toutes les valeurs sont atteintes, donc $X(\Omega) = [\![-5, 5]\!]$

5. Un dé comporte 5 faces avec le numéro 1 et une face avec le numéro 6. On note X la variable aléatoire correspondant au numéro obtenu lors d'un lancer. Que vaut $E(X)$?

On commence par préciser la loi de X : d'une part $X(\Omega) = \{1, 6\}$, d'autre part $P(X=1) = \dfrac{5}{6}$ et $P(X=1) = \dfrac{1}{6}$ donc $E(X) = 1\times\dfrac{5}{6} + 6\times\dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6} + 1 = \dfrac{11}{6}$

6. X est une variable aléatoire dont l'espérance vaut 5. Que vaut $E(3X-1)$?

On utilise la linéarité de l'espérance : $E(3X-1) = 3E(X) - 1 = 14$

7. X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[\![5, 14]\!]$, que vaut $P(X=7)$?

Toutes les valeurs prises par la variable aléatoire sont équiprobables avec une probabilité $\dfrac{1}{10}$ car il y a 10 valeurs. Donc $P(X=7) = \dfrac{1}{10}$

8. Que vaut l'espérance d'une loi binomiale de paramètres $n=12$ et $p=\dfrac{1}{4}$?

Par propriété sur les variables aléatoires suivant la loi binomiale : $E(X) = np = 12\times\dfrac{1}{4} = 3$

9. X est une variable aléatoire et $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, que vaut $P(X=13)$?

Par propriété de la loi géométrique $P(X=10) = pq^{12} = p(1-p)^{12}$ (correspond à 12 échecs, puis un succès)

10. Avec Python, créer une fonction qui renvoie 1 avec la probabilité $\dfrac{1}{4}$ et 0 avec la probabilité $\dfrac{3}{4}$

```
import random as rd
def alea():
  a=rd.randint(1,4)
  if a<2 :
    return 1
  else :
    return 0
```