Eléments de corrigé

1. On définit la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^k$

$(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

☒ oui ☐ non

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{-1}{2}\right)} = \frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1} = 0$

2. On définit la suite $(S_n)_{n\geqslant 2}$ par $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} k^2$

$(S_n)_{n\geqslant 2}$ est-elle convergente ?

☐ oui ☒ non

On dira bientôt que la série diverge grossièrement.
Pour l'instant, on peut utiliser la somme des carrés des entiers,
ou simplement dire que $\forall k \in [\![2;n]\!]$, $k^2 \geqslant 1$ et donc $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k^2 \geqslant \sum_{k=2}^{n} 1$

or $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} 1 = n-1$ donc $S_n \geqslant n-1$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ d'après le théorème des gendarmes

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente. On définit la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(u_k - u_{k-1})$

$(S_n)_{n\geqslant 1}$ est-elle convergente ?

☒ oui ☐ non

S_n est une somme télescopique, $S_n = u_n - u_0$
or $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, donc par opération $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

4. On définit la suite $(S_n)_{n\geqslant 2}$ par $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln(k+1)}{\ln(k)}$

$(S_n)_{n\geqslant 2}$ est-elle convergente ?

☐ oui ☒ non

Ici aussi, on a à faire à une série grossièrement divergente :
$\forall k \in [\![2;n]\!]$, $\dfrac{\ln(k+1)}{\ln k} \geqslant 1$
donc comme au **7.** $S_n \geqslant n-1$ et donc $(S_n)_{n\geqslant 2}$ diverge vers $+\infty$

5. On définit la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)$

$(S_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente ?

☐ oui ☒ non

Encore une série grossièrement divergente, il faut ici le travailler un peu plus :
$\forall k \geqslant 2$, $\dfrac{1}{k} \leqslant \dfrac{1}{2}$ donc $-\dfrac{1}{k} \geqslant -\dfrac{1}{2}$ et donc $1-\dfrac{1}{k} \geqslant 1-\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right) \geqslant \sum_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right) \geqslant \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2}$ i.e. $S_n \geqslant \dfrac{n-1}{2}$
et donc $(S_n)_{n\geqslant 1}$ diverge vers $+\infty$