Eléments de corrigé

1. La série $\sum_n 1,5^n$ est-elle grossièrement divergente ?

☒ oui car $(1,5^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas ☐ non

2. La série $\sum_n (-0,4)^n$ est-elle grossièrement divergente ?

☐ oui ☒ non car $\lim_{n\to\infty} (-0,4)^n = 0$

3. La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^3}$ est-elle grossièrement divergente ?

☐ oui ☒ non car $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0$

4. La série $\sum_n \frac{3}{n^2+5}$ est-elle grossièrement divergente ?

☐ oui ☒ non car $\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^2+5} = 0$

5. La série $\sum_n \frac{4n^3-1}{5n+3}$ est-elle grossièrement divergente ?

☒ oui car $\lim_{n\to\infty} \frac{4n^3-1}{5n+3} = +\infty$ ☐ non

6. La série $\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ est

☐ divergente ☐ grossièrement divergente ☒ convergente

Il s'agit d'une somme télescopique $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{1}{(n+1)^2} - 1$, qui est donc convergente.

7. La série $\sum_n n!$ est

☒ divergente ☒ grossièrement divergente car $\lim_{n\to\infty} n! = +\infty$ ☐ convergente

8. La série $\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}\right)$ est

☒ divergente ☐ grossièrement divergente ☒ convergente

En effet, $\sum_n \frac{1}{n}$ diverge et $\sum_n \frac{1}{n^3}$ donc la somme de ces deux séries ne peut converger.

9. La série $\sum_n \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n}\right)$ est

☐ divergente ☐ grossièrement divergente ☒ convergente par addition de séries convergentes

10. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs.

On définit la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et on suppose de plus que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Quelle est la nature de la série $\sum_{n} u_n$?

☐ divergente ☐ grossièrement divergente ☒ convergente

Par théorème (de la limite montone) car c'est une séries à termes positifs, qui est de plus majorée.