Eléments de corrigé

1. La série $\sum_n e^{-n+6}$ est-elle grossièrement divergente ?

☐ oui ☒ non car $\lim_{n\to+\infty} e^{-n+6} = 0$

2. La série $\sum_n \frac{(\ln n)^3}{n+3}$ est-elle grossièrement divergente ?

☐ oui ☒ non car, par croissances comparées, $\lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^3}{n+3} = 0$

3. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites telles que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$
Si $\sum_n v_n$ converge alors $\sum_n u_n$ converge ?

☒ oui ☐ non

Si $\sum_n v_n$ converge alors elle est majorée car elle est à termes positifs, et c'est donc le cas aussi de $\sum_n u_n$ car $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} v_k$
de plus $\sum_n u_n$ est à termes positifs, donc elle converge.

4. La série $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^3}$ est-elle absolument convergente ?

☒ oui ☐ non

car $\sum_{k=0}^{n} \left|\frac{(-1)^n}{n^3}\right| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^3}$ et $\sum_n \frac{1}{n^3}$ est convergente.

5. La série $\sum_n \frac{3^{n+1}}{5^{n+2}}$ est-elle grossièrement divergente ?

☐ oui ☒ non car $\frac{3^{n+1}}{5^{n+2}} = \frac{3}{5^2}\left(\frac{3}{5}\right)^n$ et $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$

6. La série $\sum_{n\geqslant 1} n(0,3)^{n-1}$ est

☐ divergente ☐ grossièrement divergente ☒ convergente

d'après les résultats sur les séries géométriques.

7. La série $\sum_{n\geqslant 1} n(n-1)\frac{1}{5^n}$ est-elle convergente ?

☒ oui ☐

d'après les résultats sur les séries géométriques encore. Pour s'y ramener, on écrit :

$\sum_{k=1}^{n} k(k-1)\frac{1}{5^k} = \frac{1}{5}\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\frac{1}{5^{k-1}}$

or $\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)\frac{1}{5^{n-1}}$ converge (et sa somme vaut $\frac{1}{(1-\frac{1}{5})^2} = \frac{25}{16}$

8. La série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{2^n n!}$ est-elle convergente ?

☒ oui ☐ non

Il s'agit ici d'une série exponentielle $\sum_{n \geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ avec $x = \frac{1}{2}$

9. La série $\sum_{n \geqslant 0} (-1)^n e^{-n}$ est-elle convergente ?

☒ oui ☐ non

Il s'agit d'une série géométrique (avec $|q| < 1$) puisque $(-1)^n e^{-n} = \left(-\frac{1}{e}\right)^n$

10. La série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{3^n}{(n+1)!}$ est-elle convergente ?

☒ oui ☐ non

On se ramène à une série exponentielle puisque $\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{3^{k-1}}{k!} = \frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^{n+1} \frac{3^k}{k!} - 1 \right)$