Eléments de corrigé

1. La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est-elle grossièrement divergente ?

☐ oui ☒ non

car $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$

en effet $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ et donc $\frac{-}{1}n \leqslant \frac{(-1)^n}{n} \leqslant \frac{1}{n}$ et on conclut par théorème des gendarmes.

2. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites telles que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$
Si $\sum_n u_n$ diverge alors $\sum_n v_n$ diverge ?

☒ oui ☐ non

$\sum_n u_n$ est une série à termes positifs qui diverge, donc elle diverge forcément vers $+\infty$.

de plus, $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} v_k$, donc $\sum_n v_n$ n'est pas majorée, et tous ses termes sont positifs, donc elle diverge vers $+\infty$

3. La série $\sum_n \frac{(-1)^n}{e^n}$ est-elle absolument convergente ?

☒ oui ☐ non

En effet $\left|\frac{(-1)^n}{e^n}\right| = \frac{1}{e^n}$ et donc en valeur absolue, il s'agit d'une série géométrique, convergente car $|q| = \frac{1}{e} \leqslant 1$

4. Que vaut $S = \sum_{n=1}^{+\infty} n(0,5)^{n-1}$?

On reconnaît la série géométrique « dérivée » : $S = \sum_{n=1}^{+\infty} n(0,5)^{n-1} = \frac{1}{(1-0,5)^2} = 4$

5. Que vaut $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\ln 3)^n}{n!}$? C'est une série exponentielle $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\ln 3)^n}{n!} = e^{\ln 3} = 3$