Eléments de corrigé

1. On effectue une expérience aléatoire qui consiste à lancer 3 fois consécutives un dé (classique). On note X la variable aléatoire qui correspond au rang d'apparition du premier 4. Si le 4 n'apparaît pas, on pose $X = 0$. Quelles sont les valeurs possibles pour X ?

☒ 0 ☒ 1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6

Le 4 peut apparaitre avec le premier dé (et donc $X = 1$), le deuxième ou le troisième (donc $X = 2$ ou $X = 3$) et s'il n'apparaît pas, l'énoncé indique que $X = 0$, d'où $X \in [\![0, 3]\!]$

2. Avec les mêmes hypothèses, que vaut $P(X = 2)$?

Il faut le voir comme une probabilité composée (avec D_i : « faire 4 au $i^{\text{ième}}$ lancer ») : $P(X = 2) = P(\bar{D}_1)P_{\bar{D}_1}(D_2) = \dfrac{5}{6} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{36}$

3. Un joueur avisé estime que $P(X = 0) \geqslant \dfrac{1}{2}$
Est-il réellement avisé ?

☒ oui ☐ non

Cela correspond à la situation où on ne fait aucun 4 : $P(X = 0) = P(\bar{D}_1)P_{\bar{D}_1}(\bar{D}_2)P_{\bar{D}_1\cap\bar{D}_2}(\bar{D}_3) = P(\bar{D}_1)P(\bar{D}_2)P(\bar{D}_3) = \left(\dfrac{5}{6}\right)^3 = \dfrac{125}{216} \geqslant \dfrac{1}{2}$ (car les événements sont mutuellement indépendants).

4. On dispose d'une urne contenant n boules blanches et n boules noires. On effectue des tirages sans remise, et on note X la variable aléatoire correspondant au rang du tirage au cours duquel apparaît la première boule noire. Quelle est la valeur maximale prise par X ?

C'est $n+1$, qui correspond au cas où on tire une boule blanche lors des n premiers tirages (puis forcément une boule noire au $n+1^{\text{ième}}$).

5. Avec les mêmes hypothèses, que vaut $P(X = 2)$?

☒ $\dfrac{n}{2(2n-1)}$ ☐ $\dfrac{1}{4}$ ☐ $\dfrac{1}{2}$ ☐ $\dfrac{n-1}{2n}$

Il faut le voir comme une probabilité composée (avec les notations ad hoc) :
$P(X = 2) = P(B_1)P_{B_1}(N_2) = \dfrac{n}{2n} \times \dfrac{n}{2n-1} = \dfrac{n}{2(2n-1)}$

6. Un joueur de foot lunatique marque au cours d'un match, soit 3 buts pour son équipe s'il est de bonne humeur, soit un but contre son camp dans le cas contraire. Sachant que son humeur est imprévisible, quelles valeurs peut prendre son total de buts marqués au cours d'une saison qui comporte 22 matchs (on compte -1 pour un but contre son camp) ?

☐ $[\![22, 44]\!]$ ☐ $[\![0, 66]\!]$ ☒ $[\![-22, 66]\!]$ ☐ $[\![-22, 33]\!]$

Les cas extrêmes sont : -22 s'il ne fait que marquer contre son camp à chaque match et 66 si à chaque match, il marque trois buts pour son équipe.

7. Avec les mêmes hypothèses, combien de buts peut-on espérer avec ce joueur au cours d'un match ?

En définissant X comme la variable aléatoire correspondant au nombre de buts marqués au cours d'un match, $E(X) = -1 \times P(X = -1) + 3P(X = 3) = -1\dfrac{1}{2} + 3\dfrac{1}{2} = 1$ (X ne peut prendre que deux valeurs : -1 et 3, de manière équiprobable).

8. Un jeu de hasard comporte 100 tickets, dont 20 sont gagnants : 10 tickets rapportent 1€, 5 tickets 2€, 4 tickets 10€ et 1 ticket 50€. Combien d'euros pouvez-vous espérer gagner avec 1 ticket ?

En modélisant avec X la variable aléatoire correspondant au gain,
$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2) + 10 \times P(X = 10) + 50 \times P(X = 50)$
donc $E(X) = 0 \times \frac{80}{100} + 1 \times \frac{10}{100} + 2 \times \frac{5}{100} + 10 \times \frac{4}{100} + 50 \times \frac{1}{100} = \frac{110}{100} = 1,1$ on peut donc espérer gagner $1,1$€.

9. Avec les mêmes hypothèses, sachant que le ticket coûte 1€, le jeu est-il rentable pour l'organisateur ?

Non car si l'organisateur paye tous les gagnants, il aura une dépense de 110€, alors que sa recette (maximale) est de 100€. L'espérance permet également de le voir, un ticket lui rapporte 1€, mais lui coûte en moyenne $1,1$€, il perd donc 10 centimes par ticket (en moyenne).

10. On considère un dé cubique truqué dont les faces sont numérotés de 1 à 6 et on note X la variable aléatoire donnée par le numéro de la face du dessus. On suppose que le dé est truqué de sorte que la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au numéro inscrit sur cette face. Que vaut l'espérance de X ?

Un peu plus difficile, il faut comprendre qu'il y a une inconnue p telle que :
$P(X = 1) = p, P(X = 2) = 2p, P(X = 3) = 3p, P(X = 4) = 4p, P(X = 5) = 5p$ et $P(X = 6) = 6p$

Mais on sait que $\sum_{i=1}^{6} P(X = i) = 1$, i.e. $21p = 1$ et donc $p = \frac{1}{21}$, mais alors comme

$E(X) = \sum_{i=1}^{6} iP(X = i) = 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2) + 3 \times P(X = 3) + 4 \times P(X = 4) + 5 \times P(X = 5) + 6 \times P(X = 6)$
on trouve $E(X) = \frac{1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + 4 \times 4 + 5 \times 5 + 6 \times 6}{21} = \frac{6 \times 7 \times 13}{6 \times 21} = \frac{91}{21} = \frac{13}{3}$