Eléments de corrigé

1. On lance un pièce une infinité de fois, quelle est la probabilité de ne jamais obtenir pile ?

On peut le voir comme l'événement contraire de « on obtient pile au premier lancer ou au deuxième ... » dans la loi géométrique et en le notant $[X = 0]$, on trouve $P(X = 0) = 1 - 1 = 0$ (il faut calculer la somme de la série).

2. On dispose d'une urne qui contient $(N - 1)$ boules blanches et une boule noire.
On effectue des tirages **sans remise** dans l'urne, jusqu'à l'obtention de la boule noire.
On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule noire.
Quelle est la valeur minimale prise par X ?

Si la boule noire sort dès le premier tirage alors $X = 1$, on ne peut pas faire plus vite !

3. Avec les mêmes hypothèses, quelle est la valeur maximale prise par X ?

Si on épuise tout le stock de boules blanches d'abord, alors $X = N$, et la boule noire ne peut pas arriver plus tard.

4. Avec les mêmes hypothèses, que vaut $P(X = 1)$?

Comme il y a équiprobabilité (entre les N boules), $P(X = 1)$, la probabilité de tirer la boule noire au premier tirage vaut $\frac{1}{N}$.

5. Avec les mêmes hypothèses, que vaut $P(X = 2)$?

$[X = 2]$ signifie que la boule noire est tirée au deuxième tirage, et plus implicitement que l'on tire une boule blanche au premier tirage, donc sachant que le tirage est sans remise (et avec des notations ad hoc) :
$P(X = 2) = P(B_1)P_{B_1}(N_2) = \dfrac{N-1}{N}\dfrac{1}{N-1} = \dfrac{1}{N}$

6. Avec les mêmes hypothèses et si $N = 4$, quel est le nombre moyen de tirages nécessaires à l'obtention de la boule noire ?

On peut continuer le raisonnement précédent (nous l'avions déjà abordé) et on remarque que pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, $P(X = k) = \dfrac{1}{N}$
donc ici $P(X = 1) = P(X = 2) = P(X = 3) = P(X = 4) = \dfrac{1}{4}$ et de fait
$E(X) = 1\times P(X = 1)+2\times P(X = 2)+3\times P(X = 3)+4\times P(X = 4) = \dfrac{1}{4}(1+2+3+4) = \dfrac{10}{4} = 2,5$

7. Une société de bus annonce un préavis de grève reconductible. La durée de la grève en nombre de jours est modélisée par une variable aléatoire N dont la loi est donnée par
$P(N = 1) = \dfrac{1}{2}, \quad P(N = 2) = \dfrac{1}{8} \quad$ et $\quad P(N = 3) = \dfrac{3}{8}$
Que vaut $E(N)$?

De même, par définition, $E(N) = 1\times P(N = 1)+2\times P(N = 2)+3\times P(N = 3) = \dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{8}+\dfrac{9}{8} = \dfrac{15}{8}$

8. Une entreprise fabrique à la chaîne des cartouches d'imprimante. Chaque cartouche a une probabilité p d'être défectueuse. L'entreprise fabrique en une heure 100 cartouches dont les défauts éventuels sont indépendants les uns des autres.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de cartouches défectueuses durant cette période.
Quel est l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X ?

Au plus il y aura 100 cartouches défectueuses, mais attention pour la valeur minimale, il peut n'y avoir aucune cartouche défectueuse, donc $X(\Omega) = [\![0, 100]\!]$

9. Avec les mêmes hypothèses et en supposant désormais que $p = \dfrac{2}{100}$, que vaut $P(X = 1)$?

☐ $\dfrac{1}{100}$ ☐ $\dfrac{2}{100}$ ☒ $100 \times \dfrac{2}{100} \times \left(\dfrac{98}{100}\right)^{99}$ ☐ $\dfrac{\binom{100}{1}}{\binom{100}{99}}$

On s'intéresse donc à la production d'une série de 100 cartouches dont une est défectueuse. Une telle série (ordonnée) a une probabiilité de $\dfrac{2}{100} \times \dfrac{98}{100}^{99}$ d'exister, mais il y a $\dbinom{100}{1}$ combinaisons possibles donnant une telle série, d'où le résultat.

10. Avec les mêmes hypothèses qu'à la question précédente, intuitivement, que vaut l'espérance de X ?

Comme il y a deux chances sur 100 qu'une cartouche soit défectueuse, on s'attend à ce qu'en moyenne sur la production de 100 cartouches, deux soit défectueuses. C'est le cas, $E(X) = 2$, nous verrons bientôt qu'il s'agit d'une loi binomiale et que dans ce cas $E(x) = np$ ((où p est la probabilité de « succès » et n est le nombre d'itération de l'épreuve).