Eléments de corrigé

1. *Exercice 7* : une urne contient 2 boules blanches et $n-2$ boules rouges ($n \geqslant 3$).
On effectue des tirages sans remise dans cette urne.
On appelle X la variable aléatoire qui donne le rang de sortie de la première boule blanche.
Que vaut $X(\Omega)$?

   $X(\Omega) = [\![1, n-1]\!]$ car au plus tôt, on tire une boule blanche au premier tirage et au plus tard, on épuise d'abord les $n-2$ rouges, puis on tire une des deux blanches (et toutes les valeurs intermédiaires sont possibles).

2. Avec les mêmes hypothèses, que vaut $P(X=1)$?

   Il y a équiprobabilité et il y a deux tirages possibles sur n qui réalisent $X=1$ donc $P(X=1) = \dfrac{2}{n}$

3. Avec les mêmes hypothèses et en appelant Y la variable aléatoire qui donne le nombre de boules rouges restant dans l'urne au moment où la première blanche est tirée, que vaut $Y(\Omega)$?

   Il ne peut pas rester plus de $n-2$ rouges et il ne peut pas en rester moins que 0 et toutes les valeurs intermédiaires sont possibles donc $Y(\Omega) = [\![0, n-2]\!]$

4. Avec les mêmes hypothèses, exprimer Y en fonction de X

   Au moment où on tire la boule blanche, on a enlevé $X-1$ boules rouges donc $Y = n-2-(X-1)$ donc $Y = n - X - 1$

5. On lance un dé. La variable aléatoire qui vaut 4 si on obtient un nombre impair et 0 si on obtient un nombre pair a pour espérance 2

   ☒ vrai ☐ faux

   $E(X) = 0 \times P(\text{pair}) + 4 \times P(\text{impair}) = 0 + 4 \times \dfrac{1}{2} = 2$

6. On lance un dé. X est la variable aléatoire égale au chiffre obtenu. Que vaut $P(X \leqslant 4)$?

   Cela correspond aux issues $1, 2, 3$ et 4 sur les 6 possibles donc $P(X \leqslant 4) = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

7. Un professeur rencontre un problème avec son clavier qui comporte plusieurs touches défectueuses. De fait, il ne peut rentrer que 3 notes : 4, 7 et 9. Les notes sont modélisées par une variable aléatoire N dont la loi est donnée par $P(N=4) = \dfrac{1}{3}$, $P(N=7) = \dfrac{1}{4}$ et $P(N=9) = \dfrac{5}{12}$
Que vaut $E(N)$?

   Par définition, $E(N) = 4 \times \dfrac{1}{3} + 7 \times \dfrac{1}{4} + 9 \times \dfrac{5}{12} = \dfrac{16+21+45}{12} = \dfrac{82}{12} = \dfrac{41}{6}$

8. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$ et de loi donnée par
$P(X=0) = P(X=2) = a$ et $P(X=1) = 1-2a$ où a est une constante réelle.
Quelles sont les valeurs possibles de a ?

   ☐ toutes les valeurs de $]0, 1[$ ☐ toutes les valeurs réelles

   ☒ toutes les valeurs de $]0, 1/2[$ ☐ $\dfrac{1}{4}$

   Il faut que $P(X=1) \in]0, 1[$ (on exclut 1 et 0 car cette valeur est possible et ce n'est pas la seule) donc $0 < 1-2a < 1$ et donc $-1 < -2a < 0$, donc $1 > 2a > 0$ soit $\dfrac{1}{2} > a > 0$
les autres valeurs n'imposent pas de contrainte.

9. Avec les mêmes hypothèses, que vaut $E(X)$?

   Par définition, $E(X) = 0 \times P(X=0) + 1 \times P(X=1) + 2 \times P(X=2) = 1 - 2a + 2a = 1$

10. On considère que dans une équipe de basket, chacun des 12 joueurs a 1 chance sur 4 d'être absent au moins une fois durant le mois de juin. On s'intéresse au nombre N de joueurs absents durant le mois de juin au moins une fois.
Que vaut $P(N = 3)$?

☐ $\dfrac{1}{4^3}$ ☐ $\dbinom{12}{3}$ ☒ $\dbinom{12}{3}\dfrac{1}{4^3}\left(\dfrac{3}{4}\right)^9$ ☐ $\dfrac{\binom{12}{3}}{\binom{12}{9}}$

Il s'agit d'une loi binomiale : on peut considérer chaque joueur comme une épreuve de Bernoulli avec une probabilité de succès (au moins une absence) de $\dfrac{1}{4}$. Pour trois joueurs données, la probabilité qu'ils soient absents, et eux seuls, au moins une fois dans le mois est de $\dfrac{1}{4^3}\left(\dfrac{3}{4}\right)^9$ et il y a $\dbinom{12}{3}$ combinaisons de 3 joueurs.