Visez la qualité : $0+0+0+0<0,5$ Sans calculatrice
Bon devoir !

Exercice 1 - quelques systèmes pour s'échauffer

1. Résoudre les systèmes

a. Résoudre le système (S_1) : $\begin{cases} 3x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = -1 \\ 4x + y + 3z = 1 \end{cases}$

b. Résoudre le système (S_2) : $\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 2 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$

2. La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Si oui, déterminer sa matrice inverse.

Exercice 2 - partie de pêche

Sur un grand lac, le concours récompense les pêcheurs ayant attrapé le plus de poissons en trois heures. Le lac étant tellement grand qu'on suppose que les chances d'attraper un poisson quel qu'il soit sont identiques et sont indépendantes du nombre de poissons déjà pêchés par les concurrents. Notre pêcheur est sur le lac et se concentre pour faire le plus de prises.

1. Dans cette question, on découpe les trois heures en périodes de 20 minutes. Pendant chaque période qu'on supposera indépendante, le pêcheur attrape au plus un poisson et la probabilité d'attraper un poisson est de $\frac{1}{4}$

a. Reconnaître la loi de la variable aléatoire U donnant le nombre de poissons attrapés par le pêcheur pendant une période.

b. Reconnaître la loi de la variable aléatoire V donnant le nombre de poissons attrapés par le pêcheur pendant le concours.

c. Quelle est la probabilité que le pêcheur termine le concours bredouille, c'est-à-dire qu'il n'ait attrapé aucun poisson ?

2. Dans cette question, on suppose à présent que le nombre de poissons attrapés par le pêcheur sur toute la durée de l'épreuve est une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$

a. Rappeler $X(\Omega), P([X=k])$ pour tout $k \in X(\Omega)$, ainsi que l'espérance et la variance de X en fonction de λ

b. Quelle valeur faut-il donner à λ pour que le nombre moyen de poissons attrapés par le pêcheur sur les trois heures soit identiques dans les questions **1.** et **2.** ?

c. Avec la valeur de λ trouvée précédemment, quelle est la probabilité que le pêcheur termine le concours bredouille ?

Problème 1

Partie I

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$ et on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Déterminer le domaine de définition de f que l'on notera $\mathscr{D}_f$ ainsi que son domaine de dérivabilité.
2. Calculer $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$
3. Dresser le tableau de variations complet de f
4. Montrer, en la résolvant, que l'équation $f(x) = 0$ d'inconnue x admet exactement deux solutions.
5. Déterminer une équation de chacune des tangentes à $\mathscr{C}_f$ aux points d'abscisses 0 et -1
6. **a.** Calculer f'', la dérivée seconde de f et vérifier que pour tout $x \in \mathscr{D}_f$ on a : $f''(x) = \dfrac{-2x^2 - 2x + 1}{(x^2 + x + 1)^2}$

   b. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$ et vérifier que $\mathscr{C}_f$ admet exactement deux points d'inflexions.
7. **a.** Justifier, sans la résoudre, que l'équation $f(x) = 1$ admet exactement une solution α dans $[0, +\infty[$

   b. On donne $\ln(3) \simeq 1,1$. Vérifier que $\alpha \in [0, 1]$

   c. Vérifier que $f(-1 - \alpha) = 1$

   d. Avec Python, définir la fonction f, puis recopier et compléter l'algorithme suivant afin qu'il permette de calculer une valeur approchée de α à 10^{-3} près par dichotomie.

```
a=
b=
while ............... :
  c=
  if ........... :

  else :

print(...)
```

8. On donne les valeurs suivantes : $\alpha \simeq 0,9$; $f\left(-\frac{1}{2}\right) \simeq -0,3$ et $\sqrt{3} \simeq 1,7$

   A l'aide des éléments obtenus précédemment, représenter graphiquement la courbe $\mathscr{C}_f$

Partie II

Dans la suite de l'exercice, on étudie la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$

1. Etudier les variations de g sur $[1, +\infty[$ où g est la fonction définie par $g(x) = f(x) - x$
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $[1, +\infty[$ que l'on notera β
3. En déduire le signe de g sur $[1, +\infty[$
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [\beta, +\infty[$
5. Déterminer les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
6. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
7. Montrer que $\frac{3}{2} \leqslant \beta$ (on donne $2e \leqslant 5,5$)
8. On pose $I = \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$, montrer qu'il existe $k \in]0, 1[$ tel que $\forall x \in I, |f'(x)| \leqslant k$
9. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \beta| \leqslant k|u_n - \beta|$
10. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \beta| \leqslant k^n|u_0 - \beta|$
11. Retrouver la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
12. Ecrire un programme `Python` qui permette d'obtenir une valeur approchée de β à 10^{-5} près.

Problème 2

Partie 1 : puissances d'une matrice

1. On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $M = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- **a.** Calculer PQ puis en déduire P^{-1}
- **b.** Déterminer la matrice D où $D = P^{-1}MP$
- **c.** Montrer que $M = PDP^{-1}$
- **d.** Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel j, on a $M^j = PD^jP^{-1}$
- **e.** Écrire, pour tout entier naturel j non nul, la première colonne de la matrice M^j
  Vérifier que ce résultat reste valable si $j = 0$

Partie 2 : étude d'une suite de variables aléatoires

Une urne contient trois boules numérotées de 1 à 3. Un tirage consiste à extraire au hasard une boule de l'urne puis à la remettre dans l'urne pour le tirage suivant.
On définit une suite de variables aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de la manière suivante :

- Pour tout entier naturel k non nul, X_k est définie *après* le $k^{\text{ème}}$ tirage.
- On procède au 1^{er} tirage et X_1 prend la valeur du numéro de la boule obtenue à ce tirage.
- Après le $k^{\text{ème}}$ tirage ($k \in \mathbb{N}^*$) :
  Soit X_k a pris la valeur 1, dans ce cas on procède au $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage et X_{k+1} prend la valeur du numéro obtenu à ce $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage.
  Soit X_k a pris la valeur j, différente de 1, dans ce cas on procède également au $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage et X_{k+1} prend la valeur j si la boule tirée porte le numéro j et la valeur 1 sinon.

1. Reconnaître la loi de X_1

2. Simulation informatique de l'expérience aléatoire décrite dans cette partie.
Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans cette partie, en créant une fonction qui prend en entrée un entier k et qui renvoie la valeur de la variable X_k

```python
import numpy.random as rd
def SimulX(k):
  X=rd.randint(1,4)
  for i in range(2,k+1):
    tirage=rd.randint(1,4)
    if X==1 :
      X= ...
    else :
      if tirage != X :
        X=...
  return X
```

3. On note U_k la matrice à 3 lignes et une colonne dont l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne est $P(X_k = i)$

- **a.** Déterminer les probabilités $P_{(X_k=j)}(X_{k+1} = i)$, pour tout couple (i, j) de $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$
- **b.** On admet que $\{(X_k = 1), (X_k = 2), (X_k = 3)\}$ est un système complet d'événements.
  Montrer, grâce à la formule des probabilités totales, que
  $$P(X_{k+1} = 1) = \frac{1}{3}P(X_k = 1) + \frac{2}{3}P(X_k = 2) + \frac{2}{3}P(X_k = 3)$$
  Trouver des relations analogues pour $P(X_{k+1} = 2)$ et $P(X_{k+1} = 3)$
- **c.** Déterminer la matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, telle que, pour tout entier naturel k non nul, on a $U_{k+1} = AU_k$

d. Montrer qu'en posant $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors, pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $U_k = A^k U_0$

4. **a.** Vérifier que $A = M + \dfrac{1}{3}I$, puis établir que, pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $A^k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j$

b. En déduire les 3 éléments de la première colonne de la matrice A^k, puis vérifier que la loi de X_k est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X_k = 1) = \frac{1}{2}\left(1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right) \quad \text{et} \quad P(X_k = 2) = P(X_k = 3) = \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right)$$

c. Déterminer les limites quand k tend vers $+\infty$ de $P(X_k = 1), P(X_k = 2), P(X_k = 3)$ et interpréter le résultat.

5. **a.** Calculer l'espérance $E(X_k)$ de X_k pour $k \in \mathbb{N}^*$

b. Avec Python, écrire une fonction, notée `esp`, qui renvoie $E(X_k)$ à l'appel de `esp(k)`