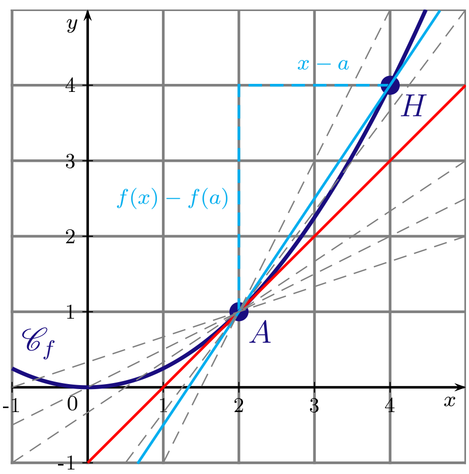
Objectifs d'apprentissage

A la fin de ce chapitre, je sais toujours calculer des dérivées et étudier une fonction, mais aussi :

- montrer qu'une fonction est dérivable en un point et calculer la dérivée en ce point. ☐
- calculer des dérivées successives et utiliser les notations $\mathscr{C}^1, \mathscr{C}^2, \mathscr{C}^\infty$ ☐
- énoncer et utiliser l'inégalité des accroissements finis. ☐
- démontrer qu'une fonction est convexe (ou concave) à l'aide des variations de sa dérivée. ☐

Dérivabilité

Définitions et propriétés	**Exemples**
<u>Définitions</u> : si $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite lorsque x tend vers a, on dit que f est **dérivable en** a et la limite est appelée **nombre dérivé de** f **en** a, noté $f'(a)$	soit f définie par $f(x) = \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 = \dfrac{x^2}{4}$ démontrons que f est dérivable en 2 et calculons $f'(2)$ $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \dfrac{\frac{x^2}{4}-\frac{2^2}{4}}{x-2} = \dfrac{x^2-4}{4(x-2)} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{4(x-2)}$ donc $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \dfrac{x+2}{4}$ et donc $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = 1$ on en déduit que f est dérivable en 2 et que $f'(2) = 1$ <u>Non dérivabilité car limite infinie</u> : $x \to \sqrt{x}$ en effet $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$
	<u>Remarques</u> : • graphiquement si A et H sont les points de $\mathscr{C}_f$ d'abscisses a et x, lorsque le point H se rapproche de A et que la sécante à $\mathscr{C}_f$ (en gris ou bleu) admet une position limite (une droite limite), on peut parler de nombre dérivé et même plus (en rouge) • cela nous apporte aussi une définition : si f est dérivable en a, la **tangente** à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse a est la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$ <u>l'équation de la tangente</u> est alors $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ on peut extrapoler aux cas où $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est infinie, ce qui correspond aux tangentes verticales
On dit que f est **dérivable à droite (resp. à gauche) en** a lorsqu'il existe un nombre ℓ tel que $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell$ (resp. $\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell$) <u>Propriété</u> : f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en a et que les deux limites sont égales	On peut montrer que f définie par $f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ e^x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$ est dérivable en 0 on trouve $\lim\limits_{0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{0^+} \dfrac{x+1-1}{x} = 1 \cdots = \lim\limits_{0^-}$ <u>Non dérivabilité car</u> $\lim\limits_{0^-} \neq \lim\limits_{0^+}$: par exemple, $x \mapsto \|x\|$ En 0 la fonction valeur absolue n'est pas dérivable car sa limite à gauche vaut -1 et sa limite à droite vaut 1
<u>Définitions</u> : lorsque f est dérivable en tout point d'un intervalle I, on dit que f est **dérivable sur** I. On définit alors l'application f' de I vers $\mathbb{R}$ qui à tout nombre a de I associe le nombre dérivée $f'(a)$. Cette application est appelée **application dérivée** de f	

Bon à savoir : si f est dérivable alors f est continue MAIS ⚠ la réciproque est fausse (cf. $x \mapsto \lvert x \rvert$)	
Opérations sur les fonctions dérivables : l'addition, le produit, le quotient (dès lors qu'il est bien défini) de fonctions dérivables est une fonction dérivable	Par opérations sur les fonctions usuelles dérivables, $x \mapsto 3\ln(x)$, $x \mapsto (2x+1)e^x$, $x \mapsto \dfrac{3x^2+7}{x^9-8x}$ sont dérivables (là où elles sont définies)
Opérations - rappels : si f et g sont deux fonctions dérivables, λ et μ des réels, $(f+g)' = f'+g'$, $(\lambda f)' = \lambda f'$, $(fg)' = f'g+fg'$, $\left(\dfrac{1}{f}\right)' = -\dfrac{f'}{f^2}$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g-fg'}{g^2}$	
Composition : si f et g sont dérivables et si $g \circ f$ est définie alors $g \circ f$ est dérivable et $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$ i.e. $\forall x \in I, (g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$	Soit $f(x) = \ln(x^2+4)$ définie sur $\mathbb{R}$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{2x}{x^2+4}$ (avec $u(x) = x^2+4$) Remarque : nous connaissions déjà cette formule dans des cas particulier, $\ln(u), e^u, \sqrt{u}$ et u^n
Réciproque : si f est bijective et dérivable, alors dès lors que f' est non nul, sa réciproque f^{-1} est dérivable et $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$	La fonction carré (f) est bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ et sa dérivée est non nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ donc sa réciproque (la fonction racine carrée) est dérivable sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{f(0)\}$ (i.e. $\mathbb{R}_+^*$) et $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}(x)} = \dfrac{1}{2 \times \sqrt{x}}$
Une méthode officielle : calcul de limite à l'aide du nombre dérivé, ou comment calculer des limites en retournant le problème : on sait qu'une fonction est dérivable donc en tout point $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et vaut $f'(a)$ Ca donne des résultats étonnants, regardez plutôt (à droite)	$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1}$ est une forme indéterminée que nous ne savons pas calculer, mais en remarquant que $\dfrac{\ln x}{x-1} = \dfrac{\ln(x)-\ln(1)}{x-1}$ et sachant que ln est dérivable, on en déduit que $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = \ln'(1) = 1$ De même $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = \exp'(0) = 1$
Approximation par la tangente : au voisinage d'un point, une fonction est « proche » de sa tangente ce qui s'écrit $\forall x \in I, f(x+h) = f(x)+hf'(x)+h\varepsilon(h)$ où h est « petit » et ε est une fonction telle que $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$	Exemples officiels et limites officielles : $e^h = 1+h+h\varepsilon(h)$ et donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^h-1}{h} = 1$ (e^x pour $x=0$) $\ln(1+h) = h+h\varepsilon(h)$ et donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$ (ln en 1) $(1+h)^\alpha = 1+\alpha h+h\varepsilon(h)$ ($(1+x)^\alpha$ en 0)

Les applications essentielles de la dérivation

Monotonie, extremum

Propriété : avec I un intervalle • f est croissante $\Leftrightarrow \forall x \in I, f'(x) \geqslant 0$ • f est décroissante $\Leftrightarrow \forall x \in I, f'(x) \leqslant 0$ • f est constante $\Leftrightarrow \forall x \in I, f'(x) = 0$	Remarque : l'hypothèse « I intervalle » est indispensable. En effet avec $f(x) = \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$, on trouve $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ et pourtant f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$ puisque $f(-1) < f(1)$, mais elle l'est sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$
Propriété : de plus si $\forall x \in I, f'(x) \geqslant 0$ (resp. $\leqslant 0$) et f' ne s'annule qu'en un nombre fini de valeurs alors f est strictement croissante (resp. décroissante).	Soit $f(x) = \dfrac{2}{5}x^5 - x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 8x + 11$ alors $f'(x) = 2(x+1)^2(x-2)^2$ donc $f'(x) \geqslant 0$ et $f'(x) = 0$ uniquement pour $x = -1$ ou $x = 2$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Propriété - condition nécessaire d'extremum local : si f admet un extremum local en a, et si f est dérivable en a, alors $f'(a) = 0$	Remarques : • la réciproque est fausse (cf. $f : x \mapsto x^3$ en 0). • dans la pratique, pour trouver on cherchera d'abord les solutions de $f'(x) = 0$ puis on étudiera la (les) solution(s) pour savoir s'il s'agit d'extremum.
Propriété - condition suffisante d'extremum local : si f' s'annule en a en changeant de signe, alors f admet un extremum local en a	On le démontre à l'aide des variations Attention, là encore la réciproque est fausse (fonctions constantes).

L'inégalité des accroissements finis

Propriété - inégalités des accroissements finis : s'il existe m et M deux réels tels que : $\forall x \in I, m \leqslant f'(x) \leqslant M$, alors $\forall (a,b)^2 \in I$, avec $a \leqslant b$, $m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$ Propriété - IAF bis : s'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall x \in I, \lvert f'(x)\rvert \leqslant k$, alors $\forall (a,b)^2 \in I, \lvert f(b) - f(a)\rvert \leqslant k\lvert b-a\rvert$	Remarque : le fait que la dérivée soit bornée limite l'amplitude des variations de f • pour tous a et b tels que $a < b < -2 : 0 \leqslant e^b - e^a \leqslant \frac{1}{e^2}(b-a)$ en effet sur cette intervalle la dérivée d'exponentielle est inférieure ou égale à $\frac{1}{e^2}$ • $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}$ en effet la dérivée de $x \mapsto \ln(x)$ est $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui est majorée par $M = \frac{1}{n}$ et minorée par $m = \frac{1}{n+1}$ sur $[n, n+1]$ donc avec $a = n$ et $b = n+1, b-a = 1$ et on obtient le résultat.
Exercice-type d'application de l'IAF : étude d'une suite récursive : avec $u_{n+1} = f(u_n)$ On étudie d'abord la fonction, ensuite (l'ordre peut changer) : • on trouve un point fixe de f, que l'on note α • on montre que u_n reste compris dans un certain intervalle I • on montre que f' est bornée sur I puis en appliquant l'IAF à u_n et α, on trouve : $\lvert f(u_n) - f(\alpha)\rvert \leqslant k\lvert u_n - \alpha\rvert$, i.e. $\lvert u_{n+1} - \alpha\rvert \leqslant k\lvert u_n - \alpha\rvert$ puis par récurrence on obtient $\lvert u_n - \alpha\rvert \leqslant k^n\lvert u_0 - \alpha\rvert$ et enfin, si $k < 1$, on trouve $u_n \to \alpha$	

Dérivées successives

Définitions : soit f une application de I vers $\mathbb{R}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, lorsqu'elle existe, $f^{(n)}$ désigne **l'application dérivée d'ordre** n **de** f (ou **application dérivée** $n^{\text{ème}}$ **de** f) définie par récurrence : $f^{(0)} = f$ puis pour $n \geqslant 1, f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$	Remarques : • pour $n = 2$, on parle de dérivée seconde • si $f^{(n)}$ existe, on dit que f est n fois dérivable.
Définitions : • on dit que f est de classe $\mathscr{C}^n$ (sur I) si elle est n fois dérivable sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I • on dit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ (sur I) si f est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$	La fonction exponentielle est de classe $\mathscr{C}^\infty$, les fonctions polynomiales aussi. Et ce n'est pas tout : fonctions inverse, ln, racine carrée (sur $\mathbb{R}_+^*$) ...

Propriétés - opérations sur les dérivées successives : si f et g sont de classe $\mathscr{C}^n$ (ou $\mathscr{C}^\infty$) sur I, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors λf et $f+g$ sont de classe $\mathscr{C}^n$ (ou $\mathscr{C}^\infty$) sur I, de plus :

$$(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}, \quad (f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$$

de même, si elles sont définies, $fg, \dfrac{1}{f}, \dfrac{f}{g}, g \circ f$ sont $\mathscr{C}^n$ (ou $\mathscr{C}^\infty$) mais on n'a pas de formule.

Convexité

Définitions : on dit que f est **convexe** (resp. **concave**) lorsque : pour tous réels $a \in I$ et $b \in I$, et pour tout $\lambda \in [0,1]$, on a :

$$f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$$

$$[\text{resp. } f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) \geqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)]$$

Propriété : f est convexe $\Leftrightarrow -f$ est concave

Interprétation géométrique de la convexité (resp. concavité) : tout segment $[A_1, A_2]$, où (A_1, A_2) est un couple de points de la courbe, est situé au-dessus (resp. en-dessous) de la portion de $\mathscr{C}_f$ comprise entre A_1 et A_2, cf. premier graphique.

Propriété : si f est $\mathscr{C}^2$, alors il y a équivalence entre

(i) f est convexe

(ii) f' est croissante

(ii) f'' est positive

(iii) $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de chacune de ses tangentes : $\forall x \in I, \forall a \in I, \quad f(x) \geqslant f(a) + (x-a)f'(a)$

Les équivalences analogues existent pour une fonction concave dérivable.

Exemples :

- $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ $(f'(x) = -\dfrac{1}{x^2})$
- les fonctions carré et exp sont convexes.
- la fonction ln est concave

Tangentes : pour exp en 0 et ln en 1

- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geqslant 1 + x$
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x) \leqslant x - 1$

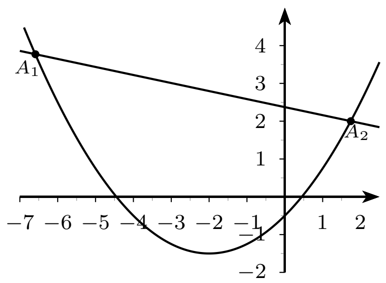
Propriété :

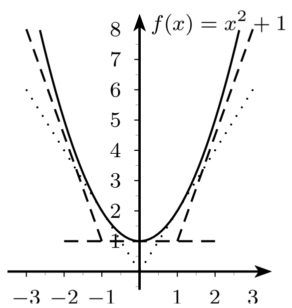
si la dérivée d'une fonction convexe f de classe $\mathscr{C}^2$ sur un intervalle ouvert s'annule en un point, f admet un minimum en ce point.

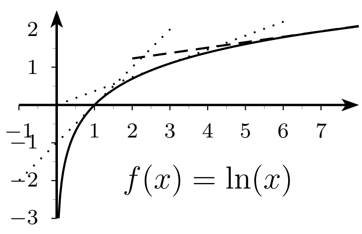
Interprétation : comme la dérivée d'une fonction convexe de classe $\mathscr{C}^2$ est croissante, cela veut dire que dans ce cas, elle est négative puis nulle puis positive.
donc la fonction f est décroissante puis croissante.

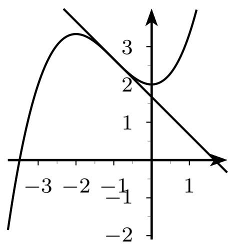
Exemple : la fonction carré admet un minimum en 0

Question économique : si le coût est une fonction convexe, on peut chercher le bénéfice maximal.









Définition : soit x_0 un nombre réel. Si f est convexe sur l'un des intervalles $]x_0 - \alpha, x_0]$ ou $[x_0, x_0 + \alpha[$ (avec $\alpha > 0$), et concave sur l'autre, on dit que le point M_0 de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x_0 est **un point d'inflexion** de $\mathscr{C}_f$

Remarque : cela signifie que la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point M_0 traverse $\mathscr{C}_f$ en M_0

Propriété : si f est $\mathscr{C}^2$ et $x_0 \in I$, n'est pas une extrémité de I, alors :
le point M_0 de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x_0 est un point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$ si et seulement si f'' s'annule en x_0 en changeant de signe.