Plan de travail

Notion	**Exercices a minima**	**Mais aussi**
Dérivabilité	1, 2, 5, 6, 7	3, 4
Représentation	2, 5, 11	9
Etude/convexité	8, 11	9, 10
Fonction/suite/IAF	12, 13, exercice du D.L.	14, 15

Etude de dérivabilité

Exercice 1

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

1. Justifier que f est continue en 0
2. f est-elle dérivable en 0 ?
3. f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2

On définit l'application f de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \exp\big(x\ln(x)\big) & \text{si} \quad x>0 \\ 1 & \text{si} \quad x=0 \end{cases}$$

1. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}_+$
2. f est-elle dérivable en 0 ?
3. Déterminer la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0
4. Dresser le tableau de variations de f
   Tracer $\mathscr{C}_f$ et la tangente au point d'abscisse 0

Exercice 3

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad f(x) = \sqrt{x}\ln(1+\sqrt{x})$$

Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$

Exercice 4

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \ln(x) & \text{si} \quad x \geqslant 1 \\ e^x - e & \text{si} \quad x<1 \end{cases}$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$
2. f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

Calcul de dérivée

Exercice 5

Soit f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2\ln(x) & \text{si} \quad x>0 \\ 1 & \text{si} \quad x=0 \end{cases}$

1. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}_+$
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et calculer $f'(x)$ pour $x>0$
3. Montrer que f est dérivable en 0, et calculer $f'(0)$
4. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$
5. Dresser le tableau de variation de f
6. Tracer l'allure de $\mathscr{C}_f$ au voisinage du point d'abscisse 0

Exercice 6

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes, déterminer un domaine Δ sur lesquelles elles sont dérivables en utilisant les théorèmes généraux, et calculer leur dérivée.

1. $f_1(x) = \sqrt{1-4x^2}$
2. $f_2(x) = x^{\ln(x)}$
3. $f_3(x) = \dfrac{1}{x^4}$
4. $f(x) = x^2 e^{-2x}$
5. $g(x) = \dfrac{x\sqrt{x}}{e^x - 1}$
6. $h(x) = (x^2+1)^x$
7. $k(x) = \ln\left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$

Dérivées successives

Exercice 7

Soit g la fonction définie sur $\mathscr{D}$ par : $\forall x \in \mathscr{D}, \quad g(x) = -\ln(1-x)$

1. Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}$ de g
2. Justifier que g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathscr{D}$
3. Par récurrence, établir une formule pour $g^{(n)}(x)$, avec $x \in \mathscr{D}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

Etude de fonctions

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = 2e^{-x}\sqrt{x}$

1. Vérifier que f est continue sur $\mathbb{R}_+$
2. Vérifier que $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{2}{e}}$
3. f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}_+$?
4. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
5. Dresser le tableau de variations complet de f
6. Etudier la convexité de f, et montrer que $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion.
7. Soit g définie sur $I = \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$ par : $\forall x \in I, \quad g(x) = f(x)$ Montrer que g définit une bijection entre I et un intervalle J à déterminer.
8. Justifier que g^{-1} est dérivable sur J

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $[0,1[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln(x)} & \text{si} \quad x \in]0,1[\\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $[0,1[$
2. f est-elle dérivable en 0 ?
3. Déterminer la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0
4. Etudier les variations de f
5. Etudier la convexité de f, et les points d'inflexion de $\mathscr{C}_f$, et donner les tangentes à $\mathscr{C}_f$ aux éventuels points d'inflexion.
6. Représenter $\mathscr{C}_f$

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^x$

1. Etudier les variations de f et ses limites.
2. Déterminer la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0
3. Montrer que f induit une bijection entre $[-1,+\infty[$ et $[-e^{-1},+\infty[$ On notera h cette bijection.
4. On note $W = h^{-1}$. Montrer que W est dérivable sur $]-e^{-1},+\infty[$ et que pour $x > -e^{-1}$ et $x \neq 0$, on a :

$$W'(x) = \frac{W(x)}{x(1+W(x))}$$

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et déterminer f'
2. Dresser le tableau de variations complet de f
3. Etudier la convexité de f, et montrer que $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion.
4. Tracer $\mathscr{C}_f$ ainsi que la tangente au point d'inflexion.

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = -\dfrac{1}{x}$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

1. Montrer que la suite $(S_n)_{n \geqslant 1}$ est croissante.
2. Soit k un entier tel que $k \geqslant 2$
   a. Montrer que pour tout $x \in [k-1, k]$,
   $$\frac{1}{k^2} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{(k-1)^2}$$
   b. En déduire un encadrement de $f(k) - f(k-1)$
3. En déduire que pour n entier tel que $n \geqslant 2$:
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant f(n) - f(1)$$
4. En déduire que la suite $(S_n)_{n \geqslant 1}$ converge.

Exercice 13

Soit f la fonction définie sur son domaine de définition $\mathscr{D}_f$ par

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

On définit une suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

On pose $I = \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$

1. Déterminer $\mathscr{D}_f$
2. Etudier les variations de f sur $[0, +\infty[$
3. Montrer que $f\langle I \rangle \subset I$
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$
5. Déterminer les *points fixes* de f, c'est-à-dire les solutions de l'équation $f(x) = x$. On note α l'unique point fixe de f tel que $\alpha \in I$
6. Montrer que :
$$\forall x \in I, \quad |f'(x)| \leqslant \frac{4}{9}$$
7. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{4}{9}|u_n - \alpha|$$
8. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{4}{9}\right)^n |u_0 - \alpha|$
9. Etudier la convergence de la suite u

Exercice 14

Soit f la fonction définie sur son domaine de définition $\mathscr{D}_f$ par

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{3}{x}\right)$$

On définit une suite $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n\in\mathbb{N}, \quad u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$$

On pose $I=\left[\sqrt{3},+\infty\right[$

1. Déterminer $\mathscr{D}_f$
2. Etudier les variations de f sur $]0,+\infty[$
3. Montrer que $f\langle I\rangle \subset I$
4. En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\in I$
5. Déterminer les points fixes de f et étudier le signe de $f(x)-x$ pour $x\in\mathbb{R}^*$
6. **a.** Etudier la monotonie de u
   b. En déduire que u converge vers un réel ℓ
   c. Montrer que $\ell=\sqrt{3}$
7. Montrer que :
$$\forall n\in\mathbb{N}, \quad \left|u_{n+1}-\sqrt{3}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|u_n-\sqrt{3}\right|$$
8. En déduire que la suite u converge vers $\sqrt{3}$
9. Déterminer un entier N tel que $\left|u_N-\sqrt{3}\right| \leqslant 10^{-7}$

Exercice 15

Soit f l'application

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \dfrac{e^x}{e^x+1}\end{array}$$

On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0\in\mathbb{R} \\ \forall n\in\mathbb{N}, \quad u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$$

1. Dresser le tableau de variations complet de f (on fera apparaitre les limites).
2. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n\in[0,1]$
3. Montrer que f admet un unique point fixe α, et que $\alpha\in]0,1[$ (<u>indication</u> : étudier la fonction g définie par $g(x)=f(x)-x$).
4. Montrer que : $\forall x\in[0,1], |f'(x)|\leqslant \dfrac{e}{4}$
5. Montrer que :
$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \quad |u_{n+1}-\alpha|\leqslant \frac{e}{4}|u_n-\alpha|$$
6. Montrer par récurrence que :
$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \quad |u_n-\alpha|\leqslant \left(\frac{e}{4}\right)^{n-1}$$
7. Conclure quand à la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
8. Déterminer un entier N tel que $|u_N-\alpha|\leqslant 10^{-3}$
9. Ecrire un script `Python` qui permet d'obtenir un tel entier N