Objectifs d'apprentissage

A la fin de ce chapitre, je sais :

- résoudre une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 1 ou 2 ☐
- déterminer une solution à l'aide de condition(s) initiale(s) ☐
- interpréter des situations d'équilibre ☐

Définitions

Définitions : une **équation différentielle** est une équation reliant une fonction et sa dérivée (ou ses dérivées successives)

- si l'équation lie une fonction et sa dérivée (et sa dérivée seconde), elle est dite **d'ordre** 1 (**d'ordre** 2),
- on s'intéressera plus précisément aux équations différentielles **linéaires** et à **coefficients constants**, du type : $a_ny^{(n)} + \cdots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = b(t)$
- la fonction $b(t)$ est appelée le **second membre** et s'il est nul, on dit que l'équation est **homogène**

Remarque : une telle équation comporte donc une infinité de contraintes, par exemple f est solution de $y' = 2y$ sur $]-3, 8] \Leftrightarrow \forall x \in]-3, 8], f'(x) = 2f(x)$

Exemples :

- $y' = \ln(1+y^2)$ (où y est une fonction) est une équation différentielle (trop compliquée pour nous)
- $y''+\sqrt{t}y'+ty = t^3-5$ est une équation différentielle linéaire (à coefficients non constants)
- $4y'' - 11y' + 7y = \dfrac{t}{1+t^2}$ est une équation différentielle linéaire à coefficients constants
- $y' - (5+t^4)y = 0$ est une équation différentielle (linéaire) homogène

Equations différentielles linéaires homogènes d'ordre 1 et 2

Dans cette section, les coefficients de l'équation différentielle sont constants.

Propriété : avec $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble des solutions de l'équation $y' + ay = 0$ est

$$\mathscr{S} = \left\{x \mapsto \lambda e^{-ax}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

Exemples : $f(x) = e^{4x}$ est une solution de l'équation $y' - 4y = 0$

L'ensemble des solutions de l'équation $2y' + 5y = 0$ est $\mathscr{S} = \left\{x \mapsto \lambda e^{4x}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$

Propriété : avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, si $a^2-4b > 0$ (i.e. $\Delta > 0$) l'ensemble des solutions de l'équation $y'' + ay' + by = 0$ est

$$\mathscr{S} = \left\{x \mapsto \lambda e^{r_1x} + \mu e^{r_2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

où r_1 et r_2 sont les racines du trinôme $x^2 + ax + b$

Exemples : l'ensemble des solutions de l'équation $y'' - 5y' + 6y = 0$ est $\mathscr{S} = \left\{x \mapsto \lambda e^{2x} + \mu e^{3x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$

$f(x) = e^{2x}$ est une solution de l'équation $y'' - 4y = 0$

Ensemble des solutions

Propriétés : l'ensemble des solutions d'une équation différentielle homogène (linéaire) est stable par combinaison linéaire

Exemple : les fonctions $f(x) = e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}x}, g(x) = e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}x}$ sont solutions de l'équation $y'' - y' - y = 0$ donc $2f + 3g$ est solution de l'équation

Propriétés : si une équation différentielle (linéaire) admet une solution particulière f_0, alors l'ensemble de ses solutions est égal à : $\mathscr{S} = \{x \mapsto f_0(x) + f(x), f$ est solution de l'équation homogène$\}$

Exemple : avec l'équation $y' - 3y = 7e^{3t}$

$f_0(t) = 7te^{3t}$ est une solution particulière

et $t \mapsto \lambda e^{3t}$ sont les solutions de l'équation homogène

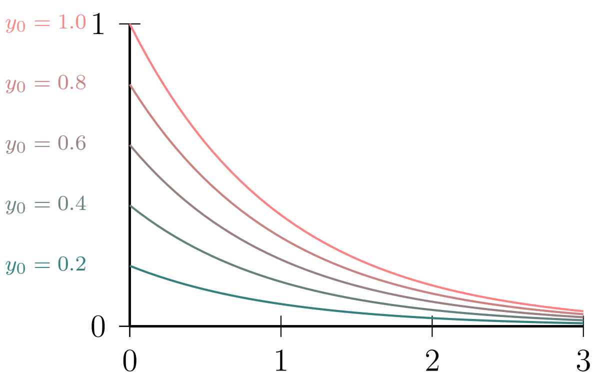
donc $\mathscr{S} = \left\{x \mapsto 7te^{3t} + \lambda e^{3t}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$

Méthode

Dans la pratique, la résolution d'une équation différentielle linéaire se déroulera généralement de la façon suivante (les points **1.** et **2.** sont interchangeables) :

1. résolution de l'équation homogène :
   - ▷ fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{ax}$ si l'équation est d'ordre 1
   - ▷ fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{\alpha x} + \mu e^{\beta x}$ si l'équation est d'ordre 2 (α et β étant les solutions du trinôme associé)
2. recherche d'une solution particulière :
   - ▷ 1^er^ cas : le second membre est constant, alors la solution est une constante
   - ▷ 2^ème^ cas : le second membre n'est pas constant, la solution est alors proposée par l'énoncé et il suffit de la vérifier.
3. conclusion : on assemble ensuite solution particulière et solutions de l'équation homogène pour conclure sur l'ensemble des solutions.
   Dans le cas où il y a une (ou des) condition(s) initiale(s), on détermine alors complètement la solution.

Condition(s) initiale(s)

Propriétés : une équation différentielle linéaire admet une unique solution telle que • $y(0) = y_0$ si elle est d'ordre 1 • $y(0) = y_0$ et $y'(0) = y_1$ si elle est d'ordre 2	Remarque : dès lors que le point de départ est fixé, le comportement de la solution est complètement déterminé. On parle de « trajectoire » pour la représentation graphique d'une solution.
	Comme l'indique le graphique, plusieurs fonctions vérifient une même équation différentielle (ici $y' = -y$), par contre dès lors qu'on fixe un point de passage « obligatoire », il n'y a plus qu'une seule solution valable. Pour l'ordre 2, cela correspond à fixer la position et la vitesse initiales. Remarque : on parle de « condition(s) initiale(s) », mais la propriété est valable pous n'importe quelle abscisse $y(x_0) = a$ (et $y'(x_0) = b$). Conséquence graphique : deux « trajectoires » différentes n'ont aucun point en commun

Situation d'équilibre

Définition : une solution constante est appelée une **situation d'équilibre** ou **trajectoire d'équilibre**	Exemple : avec l'équation logistique $N'(t) = aN(t)(1 - bN(t))$ $\forall t \in \mathbb{R}, N(t) = \dfrac{1}{b}$ est une situation d'équilibre
Propriété : si une trajectoire « converge » (quand $t \to +\infty$), alors elle « converge » vers une situation d'équilibre.	avec l'équation logistique, toute solution s'écrit $\forall t \in \mathbb{R}, N(t) = \dfrac{1}{b - \lambda e^{-at}}$ qui « converge » vers la situation d'équilibre précédente.