Corrigés ou éléments de corrigé

Exercices de base

Exercice 1

Résoudre les équations homogènes :

a) $y' + y = 0$ b) $y' - 3y = 0$ c) $y' = 2y$ d) $3y' = y$ e) $11y' - y = 0$

f) $y'' - 11y' + 30y = 0$ g) $y'' - \dfrac{1}{9}y = 0$ h) $y'' + y' + y = 0$

Les cinq premières sont des équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants du premier ordre donc d'après le cours :

a) $\mathscr{S} = \left\{x \mapsto \lambda e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ b) $\mathscr{S} = \left\{x \mapsto \lambda e^{3x}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$

c) $\mathscr{S} = \left\{x \mapsto \lambda e^{2x}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$

d) $\mathscr{S} = \left\{x \mapsto \lambda e^{\frac{1}{3}x}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ e) $\mathscr{S} = \left\{x \mapsto \lambda e^{\frac{1}{11}x}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$

pour les suivantes, elles sont du second ordre donc on cherche les racines du trinôme associé :

f) $x^2 - 11x + 30 = (x-5)(x-6)$ donc les racines sont 5 et 6 et de fait $\mathscr{S} = \left\{x \mapsto \lambda e^{5x} + \mu e^{6x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$

g) $x^2 - \dfrac{1}{9} = \left(x - \dfrac{1}{3}\right)\left(x + \dfrac{1}{3}\right)$ donc les racines sont $-\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{1}{3}$ et de fait $\mathscr{S} = \left\{x \mapsto \lambda e^{-\frac{1}{3}x} + \mu e^{\frac{1}{3}x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$

h) $x^2 + x + 1 = 0$ n'admet pas de racines ($\Delta = -3$) donc nous ne sommes pas en mesure de donner les solutions de l'équation différentielle.

Exercice 2 - conditions initiales

a) Déterminer la solution de $y' + 2y = -4, y(1) = -3$

Les solutions de l'équation homogène ($y' + 2y = 0$) sont
$\mathscr{S}_{\mathscr{H}} = \left\{x \mapsto \lambda e^{-2x}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ et $x \mapsto -2$ est une solution particulière de l'équation donc $\mathscr{S} = \left\{x \mapsto -2 + \lambda e^{-2x}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$
soit f une solution, alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -2 + \lambda e^{-2x}$
si de plus $f(1) = -3$ (condition initiale),
alors $-2 + \lambda e^{-2} = -3 \Rightarrow \lambda e^{-2} = -1 \Rightarrow \lambda = -e^2$
donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -2 - e^2 e^{-2x} = -(2 + e^{2-2x})$

b) Déterminer la solution de $2y' - 3y = 9, y(-1) = 1$

Les solutions de l'équation homogène ($y' - \dfrac{3}{2}y = 0$) sont
$\mathscr{S}_{\mathscr{H}} = \left\{x \mapsto \lambda e^{\frac{3}{2}x}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ et $x \mapsto -3$ est une solution particulière de l'équation donc $\mathscr{S} = \left\{x \mapsto -3 + \lambda e^{\frac{3}{2}x}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$
soit f une solution, alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -3 + \lambda e^{\frac{3}{2}x}$
si de plus $f(-1) = 1$ (condition initiale),
alors $-3 + \lambda e^{-\frac{3}{2}} = 1 \Rightarrow \lambda e^{-\frac{3}{2}} = 4 \Rightarrow \lambda = 4e^{\frac{3}{2}}$
donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -3 + 4e^{\frac{3}{2}} e^{-e^{\frac{3}{2}x} x} = -3 + 4e^{\frac{3}{2}(1-x)}$

c) Déterminer la solution de $y'' + 2y' - 3y = 9, y(0) = 0, y'(0) = 2$

Le trinôme associé, $x^2 + 2x - 3$ admet 1 et -3 pour racines évidentes donc les solutions de l'équation homogène ($y'' + 2y' - 3y = 0$) sont
$\mathscr{S}_{\mathscr{H}} = \left\{x \mapsto \lambda e^{-3x} + \mu e^{x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$ et $x \mapsto -3$ est une solution particulière de l'équation
donc $\mathscr{S} = \left\{x \mapsto -3 + \lambda e^{-3x} + \mu e^{x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$ et pour f une solution,
alors $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -3 + \lambda e^{-3x} + \mu e^{x}$
alors $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -3\lambda e^{-3x} + \mu e^{x}$
si de plus $f(0) = 0$ et $f'(0) = 2$ (conditions initiales), alors

$$\left\{\begin{array}{rcl} -3 + \lambda + \mu & = & 0 \\ -3\lambda + \mu & = & 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \mu & = & 3 - \lambda \\ 4\lambda & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = \dfrac{1}{4} \\ \mu = \dfrac{11}{4} \end{array}\right.$$

donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -3 + \dfrac{1}{4}e^{-3x} + \dfrac{11}{4}e^{x}$

Exercice 3 - Premier ordre, à coefficients constants

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $2y' - y = \pi$

Les solutions de l'équation homogène $(y' - \dfrac{1}{2}y = 0)$ sont $\mathscr{S}_{\mathscr{H}} = \left\{x \mapsto \lambda e^{-\frac{1}{2}x}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ et $x \mapsto -\pi$ est une solution particulière de l'équation donc $\mathscr{S} = \left\{x \mapsto -\pi + \lambda e^{-\frac{1}{2}x}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$

b) $7y' + 2y = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$

Les solutions de l'équation homogène $(y' + \dfrac{2}{7}y = 0)$ sont
$\mathscr{S}_H = \left\{x \mapsto \lambda e^{-\frac{2}{7}x}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$
Pour la solution particulière, on va chercher un polynôme de même degré que celui du second membre.
soit f définie par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ où a, b, c et d sont des réels, alors $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
et si f est une solution particulière alors $\forall x \in \mathbb{R}$,
$7(3ax^2 + 2bx + c) + 2(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$
donc $2ax^3 + (21a+2b)x^2 + (14b+2c)x + 7c + 2d = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$
donc on cherche $2a = 2$ et donc $a = 1$,
$21a + 2b = -5$ donc $2b = -5 - 21a = -26$ et donc $b = -13$
$14b + 2c = 4$ donc $2c = 4 - 14b = 4 + 182 = 186$ et donc $c = 93$
enfin $7c + 2d = -1$ donc $2d = -1 - 7c = -1 - 651 = -652$ donc $d = -326$ et donc $f(x) = x^3 - 13x^2 + 93x - 326$ est une solution particulière de l'équation (on peut vérifier)
donc $\mathscr{S} = \left\{x \mapsto x^3 - 13x^2 + 93x - 326 + \lambda e^{-\frac{2}{7}x}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$

c) $y' + 2y = x^2 - 2x + 3$

Exercice 4 - Deuxième ordre, à coefficients constants

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y'' - 4y = 12$

Le trinôme associé, $x^2 - 4$ admet -2 et 2 pour racines donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène $(y'' - 4y = 0)$ est $\mathscr{S}_{\mathscr{H}} = \left\{x \mapsto \lambda e^{-2x} + \mu e^{2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$
de plus le second membre est constant et $x \mapsto -3$ est une solution particulière de l'équation
donc $\mathscr{S} = \left\{x \mapsto -3 + \lambda e^{-2x} + \mu e^{2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$

b) $y'' + 7y' + 12y = x$

Le trinôme associé, $x^2 + 7x + 12$ admet -4 et -3 pour racines donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène $(y'' + 7y' + 12y = 0)$ est $\mathscr{S}_{\mathscr{H}} = \left\{x \mapsto \lambda e^{-4x} + \mu e^{-3x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$
pour la solution particulière, on va chercher un polynôme de même degré que celui du second membre.
soit f définie par $f(x) = ax + b$ où a et b sont des réels, alors $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = a$ et $f''(x) = 0$
et si f est une solution particulière alors $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 7a + 12(ax + b) = x &\Leftrightarrow 12ax + 7a + 12b = x \\ &\Leftrightarrow 12a = 1 \text{ et } 7a + 12b = 0 \text{ par identification} \\ &\Leftrightarrow a = \frac{1}{12} \text{ et } 12b = -\frac{7}{12} \text{ soit } b = -\frac{7}{144} \end{aligned}$$

donc $x \mapsto \dfrac{1}{12}x - \dfrac{7}{144}$ est une solution de l'équation différentielle
d'où finalement $\mathscr{S} = \left\{x \mapsto \dfrac{1}{12}x - \dfrac{7}{144} + \lambda e^{-4x} + \mu e^{-3x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$

Exercices d'application

Exercice 8 - Taux d'alcoolémie

Le taux d'alcoolémie $f(t)$ (en $\mathrm{g}\cdot\mathrm{L}^{-1}$) d'une personne ayant absorbé, à jeun, une certaine quantité d'alcool vérifie l'équation différentielle $y'(t)+y(t)=ae^{-t}$, où $t \geqslant 0$ est le temps écoulé après l'ingestion (exprimé en heures) et a est une constante qui dépend de la quantité d'alcool ingérée et de la personne.

1. Montrer que $t \mapsto ate^{-t}$ est une solution particulière de l'équation différentielle.

On pose $g(t)=ate^{-t}$ pour $t \in \mathbb{R}_+$, alors par dérivée d'un produit,
$g'(t)=ae^{-t}+at(-e^{-t})=ae^{-t}-ate^{-t}$
de fait $\forall t \in \mathbb{R}_+, g'(t)+g(t)=ae^{-t}-ate^{-t}+ate^{-t}=ae^{-t}$
donc g est bien solution de l'équation différentielle $y'(t)+y(t)=ae^{-t}$

2. Exprimer f en fonction de t et de a

f est solution de l'équation différentielle $y'(t)+y(t)=ae^{-t}$, nous allons donc la résoudre.
Nous avons déjà trouvé une solution particulière à la question précédente, reste à trouver les solutions de l'équation homogène
or l'ensemble des solutions de l'équation homogène ($y'+y=0$) est $\mathscr{S}_H=\left\{t \mapsto \lambda e^{-t}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$
donc l'ensemble des solutions de $y'(t)+y(t)=ae^{-t}$ est $\mathscr{S}=\left\{t \mapsto \lambda e^{-t}+ate^{-t}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$
donc comme $f \in \mathscr{S}, \exists \lambda \in \mathbb{R}$, tel que $\forall t \in \mathbb{R}_+, f(t)=\lambda e^{-t}+ate^{-t}=(\lambda+at)e^{-t}$
et on peut déterminer λ puisque on suppose que la personne ingère de l'alcool au temps $t=0$ donc son taux d'alcoolémie est nul à cet instant, i.e. $f(0)=0$
or $f(0)=\lambda$ donc $\lambda=0$ et de fait $\forall t \in \mathbb{R}_+, f(t)=ate^{-t}$

3. On fixe $a=5$
Etudier les variations de f et tracer sa courbe. Déterminer le taux d'alcoolémie maximal et le temps au bout duquel il est atteint.

Il suffit désormais d'étudier la fonction $f(t)=5te^{-t}$
or comme étudié plus haut (cf. $g(t)$ avec $a=5$),
$\forall t \in \mathbb{R}_+, f'(t)=ae^{-t}-ate^{-t}=(1-t)ae^{-t}$
donc $f'(t)$ est du signe de $1-t$ (l'exponentielle étant toujours strictement positive) et $1-t \geqslant 0 \Leftrightarrow t \leqslant 1$ d'où le tableau suivant,
avec $f(1)=5e^{-1}=\dfrac{5}{e}$ et car $f(t)=5\dfrac{t}{e^t}$ d'où $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t)=0$ par croissance comparée.

t	0		1		$+\infty$
$1-t$		$+$	0	-	
$f'(t)$		$+$	0	-	
f	0	$\nearrow$	$\dfrac{5}{e}$	$\searrow$	0

donc f, i.e. le taux d'alcoolémie, atteint son maximum pour $t=1$, soit au bout d'une heure et il vaut alors $\dfrac{5}{e}$ ce qui est proche de 2 ($\mathrm{g}\cdot\mathrm{L}^{-1}$)

4. Donner une valeur du délai T (à l'heure près par excès) au bout duquel le taux d'alcoolémie de cette personne est inférieur à $0,5\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{L}^{-1}$ (on pourra utiliser une calculatrice).

Dans la pratique, l'objectif est de savoir quand le taux est redescendu en-dessous de $0,5\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{L}^{-1}$, on cherche donc pour $t \geqslant 1$ et on le fait en tatônnant
de manière évidente $f(1)>0,5$, on calcule alors $f(2)=\dfrac{10}{e^2}\simeq 1,35$ puis $f(3)=\dfrac{15}{e^3}\simeq 0,75$ et enfin $f(4)=\dfrac{20}{e^4}\simeq 0,37$
donc on sait qu'au bout de 4 heures le taux d'alcoolémie est redescendu en-dessous de $0,5\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{L}^{-1}$

Exercice 9

Exercice extrait d'un sujet de bac STI2D 2019 calculatrice autorisée

Le clinker est un constituant du ciment qui résulte de la cuisson d'un mélange composé de calcaire et d'argile. La fabrication du clinker nécessite des fours à très haute température qui libèrent dans l'air une grande quantité de dioxyde de carbone (CO_2).
Dans une cimenterie, la fabrication du clinker s'effectue de 7h30 à 20h, dans une pièce de volume 900 000 dm^3.
A 20h, après une journée de travail, le taux volumique de CO_2 dans la pièce est de $0,6\,\%$

1. Justifier que le volume de CO_2 présent dans cette pièce à 20h est de 5 400 dm^3

   Le volume de CO_2 présent dans cette pièce à 20h est de $900\,000 \times \dfrac{0,6}{100} = 9\,000 \times 0,6 = 5\,400$ dm^3.

2. Pour diminuer ce taux de CO_2 durant la nuit, l'entreprise a installé dans la pièce une colonne de ventilation. Le volume de CO_2, exprimé en dm^3, est alors modélisé par une fonction du temps t écoulé après 20h, exprimé en minutes. t varie ainsi dans l'intervalle $[0; 690]$ puisqu'il y a 690 minutes entre 20h et 7h30.

   On admet que cette fonction V, définie et dérivable sur l'intervalle $[0; 690]$ est une solution, sur cet intervalle, de l'équation différentielle $(E) : y' + 0,01y = 4,5$

   a. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (E)

   Les solutions de l'équation différentielle sont de la forme :
   $V(t) = A\mathrm{e}^{-0,01t} + \dfrac{4,5}{0,01}$, avec $A \in \mathbb{R}$ (A est un nombre réel indéterminé pour l'instant).
   Donc : $V(t) = A\mathrm{e}^{-0,01t} + 450$, avec $A \in \mathbb{R}$.

   b. Vérifier que pour tout réel t de l'intervalle $[0; 690]$,
   $V(t) = 4\,950\mathrm{e}^{-0,01t} + 450$

   On sait que $V(0) = 5\,400$, d'où en utilisant la question précédente :
   $V(0) = A + 450 = 5\,400$, d'où $A = 5\,400 - 450 = 4\,950$.
   Conclusion : pour tout réel t de l'intervalle $[0\ ;\ 690]$, $V(t) = 4\,950\mathrm{e}^{-0,01t} + 450$.

3. Quel sera, au dm^3 près, le volume de CO_2 dans cette pièce à 21h ?

   21h correspond à $t = 60$, donc
   $V(60) = 4\,950\mathrm{e}^{-0,01\times 60} + 450 = 4\,950\mathrm{e}^{-0,6} + 450 \approx 3\,166{,}62$, soit 3 167 dm^3 à 1 dm^3 près.

4. Les responsables de la cimenterie affirment que chaque matin à 7h30 le taux de CO_2 dans cette pièce est inférieur à $0,06\,\%$
   Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier la réponse.

   A 7h30, il se sera écoulé 690 minutes et le volume de CO_2 sera égal à :
   $V(690) = 4\,950\mathrm{e}^{-0,01\times 690} + 450 = 4\,950\mathrm{e}^{-6,9} + 450 \approx 454,989$.
   Le taux de CO_2 sera donc de :
   $\dfrac{454,959}{90\,000} \approx 0,0005$, soit $0,05\%$, et les responsables ont donc raison.

5. Déterminer l'heure à partir de laquelle le volume de CO_2 dans la pièce deviendra inférieur à 900 dm^3

   Il faut résoudre l'inéquation :
   $4\,950\mathrm{e}^{-0,01t} + 450 < 900$, ou $4\,950\mathrm{e}^{-0,01t} < 450$, ou encore $11 \times 450\mathrm{e}^{-0,01t} < 450$, et en simplifiant :
   $11\mathrm{e}^{-0,01t} < 1$
   et en multipliant par $\mathrm{e}^{0,01t}$, $11 < \mathrm{e}^{0,01t}$.
   D'après la croissance de la fonction logarithme :
   $\ln 11 < 0,01t$ et enfin $100 \ln 11 < t$.
   Or $100 \ln 11 \approx 239,79 \approx 240$ min ou encore 4 h.
   Le volume de CO_2 dans la pièce deviendra inférieur à 900 dm^3 à minuit.