Concours blanc

Mathématiques

7 juin 2024

Durée : 4 heures
Le devoir comporte quatre exercices
Calculatrices non autorisées

- Les exercices peuvent être traités dans l'ordre souhaité.
- De nombreuses questions sont indépendantes, les résultats des questions non traitées peuvent bien sûr être admis.

Exercice 1 - Etudes de fonctions et de suites

Pour $x \in]0;+\infty[$ on pose : $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n

1. **a.** Etudier les variations de la fonction $f : x \mapsto f(x)$ (on dressera son tableau de variations, en précisant les limites).

b. Vérifier que chaque terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est correctement défini et strictement positif.

2. Informatique.

a. Recopier et compléter la fonction Python suivante afin que l'appel `fonc_1(a)` renvoie le plus petit entier n tel que $u_n > a$

```
def fonc_1(a):
  from numpy import exp
  u=1
  n=0
  while ........ :
    u=exp(-u)/u
    n=........
  return n
```

b. On considère maintenant la fonction Python :

```
def fonc_2(a):
  from numpy import exp
  u=1
  n=0
  while u>a:
    u=exp(-u)/u
    n=n+1
  return n
```

Les appels `fonc_1(10**6)` et `fonc_2(10**(-6))` donnent respectivement 6 et 5
Qu'en déduire pour u_5 et u_6 ?
Commenter ce résultat en une ligne.

c. Ecrire une fonction Python qui a pour argument un entier n et qui renvoie la valeur de u_n

3. Pour $x \in [0;+\infty[$ on pose : $g(x) = e^{-x} - x^2$

a. Démontrer que la fonction $g : x \mapsto g(x)$ réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur $]-\infty;1]$

b. En déduire que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue x, possède une unique solution dans l'intervalle $]0;+\infty[$, que l'on notera α

c. Justifier que $\dfrac{1}{e} < \alpha < 1$ $\quad$ (*on rappelle que* $e \approx 2,7$)

4. **a.** Démontrer que l'on a : $u_2 > u_0$

b. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_{2n}$. Déduire de la question précédente que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

c. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = u_{2n+1}$. Justifier que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

5. Pour $x \in]0;+\infty[$ on pose : $h(x) = f \circ f(x)$. On pose également $h(0) = 0$

a. Soit x un réel strictement positif. Déterminer $h(x)$

b. Démontrer que la fonction $h : x \mapsto h(x)$ est continue sur $[0;+\infty[$

c. Démontrer que l'équation $h(x) = x$, d'inconnue x, admet exactement deux solutions sur $[0;+\infty[$ qui sont 0 et α, α étant le réel introduit à la question **3.b.**

d. En déduire la limite de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$

6. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle majorée ? Admet-elle une limite ?

Problème 1

Les parties B et C sont indépendantes de la partie A

Partie I : équations différentielles et intégrales

1. On considère l'équation différentielle $\quad (E_1) : \quad y'(t) = -y(t) + e^{-t}$
où y est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

a. Résoudre l'équation différentielle homogène $y'(t) = -y(t)$ sur $\mathbb{R}$

b. Déterminer une solution particulière y_0 de (E_1) de la forme $y_0 \colon t \mapsto ate^{-t}$ avec $a \in \mathbb{R}$

c. Résoudre l'équation différentielle (E_1)

d. Calculer $\displaystyle\int_0^1 y_0(t)dt$

2. On s'intéresse à l'équation différentielle $\quad (E_2) : y'' - 4y' + 3y = 15$

a. Résoudre l'équation différentielle (E_2)

b. Déterminer la solution de l'équation différentielle (E_2) vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$

c. Calculer $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} y(t)dt$ où y est la solution trouvée à la question **2.b.**

Partie B : étude d'une suite de fonctions

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = (x+1)e^{kx}$
On note $\mathscr{C}_k$ la courbe de f_k dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. **a.** Calculer les limites de la fonction f_k en $-\infty$ et en $+\infty$

b. Dresser le tableau de variation de f_k en y faisant figurer les valeurs prises par f_k en -1 et en 0

c. Etudier la convexité de f_k

2. **a.** Etudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k+1}$. Vous préciserez leurs points d'intersection.

b. Dessiner sur un même graphique l'allure de $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k+1}$

Partie C : étude d'une suite implicite

1. **a.** Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_k(x) = k$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ notée u_k

b. Déterminer explicitement u_1

2. Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 1$, on a $0 \leqslant u_k \leqslant \dfrac{\ln(k)}{k}$
En déduire que la suite (u_k) converge et donner sa limite.

3. On admet que $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k}$ diverge, quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{\ln(k)}{k}$?

4. **a.** Soit $k \geqslant 1$ un entier, montrer que $u_k = \dfrac{\ln(k)}{k} - \dfrac{\ln(u_k+1)}{k}$

b. En déduire que $\dfrac{u_k}{\frac{\ln(k)}{k}} \to 1$ lorsque k tend vers $+\infty$

c. Emettre une hypothèse sur la nature de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} u_k$

Problème 2

Partie I

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 0, et dont tous les autres coefficients sont égaux à 1 :

$$M_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On note I_n la matrice identité d'ordre n

1. Etude du cas $n = 3$

Dans cette question, on considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

a. Calculer $(M + I_3)^2$, puis en déduire une expression de M^2 en fonction de M et I_3

b. Avec la méthode du pivot de Gauss, montrer que P est inversible et que : $P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Dans les questions qui suivent, on pose $D = P^{-1}MP$

c. Déterminer la matrice D

d. Montrer que, pour tout entier naturel k, $M^k = PD^kP^{-1}$

e. Montrer qu'il existe deux réels a_k et b_k tels que $M^k = a_kM + b_kI_3$ pour tout entier naturel k

f. En utilisant les résultats des questions précédentes, déterminer a_k et b_k

2. Cas $n = 4$

On considère la matrice J_4 carrée d'ordre 4 dont tous les coefficients sont égaux à 1 :

$$J_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a. Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, $(J_4)^k = 4^{k-1}J_4$

b. Exprimer M_4 en fonction de I_4 et J_4

c. Exprimer $(M_4)^2$ en fonction de I_4 et J_4

d. En déduire, pour tout entier naturel k non nul $(M_4)^k = c_kJ_4 + (-1)^k I_4$ et que l'on a la relation : $\forall k \in \mathbb{N}, c_{k+1} = 3c_k + (-1)^k$

e. Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, $c_k = \dfrac{3^k + (-1)^{k+1}}{4}$

f. En déduire, pour tout entier naturel k non nul, une expression des coefficients diagonaux et des coefficients non diagonaux de $(M_4)^k$, en fonction de k

Partie II

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère un graphe non orienté K_n à n sommets numérotés de 1 à n, dans lequel chaque sommet est relié à chaque autre sommet par une arête et n'est pas relié à lui-même par une arête.

3. Représenter graphiquement les graphes K_2, K_3, K_4 et K_5

4. **a.** Déterminer la matrice d'adjacence du graphe K_n

b. Dans le graphe K_4, combien existe-t-il de chaines (ou chemins) de longueur 4 menant du sommet numéro 1 à lui-même ?

On pourra utiliser le résultat de la question 2e.

5. Déterminer le degré de chaque sommet du graphe K_n

6. Montrer que le nombre total d'arêtes du graphe K_n est égal à $\dfrac{n(n-1)}{2}$

7. Avec Python :

a. Définir la matrice M_4

b. Ecrire une commande qui permet de retrouver le résultat de la question **4.b.**

c. Ecrire un programme qui permet de tester le critère de connexité du graphe. On émettra sur une hypothèse sur le résultat obtenu au regard de ce critère.

Partie III

Soit K_3 le graphe défini dans la **partie II**. On parcourt les sommets du graphe K_3 de la façon suivante :

- Initialement, à l'étape $k = 0$, on se trouve sur le sommet numéro 1
- A chaque étape, on change de sommet en suivant au hasard, avec équiprobabilité, l'une des arêtes issues du sommet actuel.

Pour tout entier naturel k, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel on se trouve à la $k^{\text{ème}}$ étape (c'est-à-dire à l'issue du $k^{\text{ème}}$ déplacement). En particulier, X_0 est une variable aléatoire constante égale à 1

Pour tout entier naturel k, on note V_k la matrice colonne de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$V_k = \begin{pmatrix} P(X_k = 1) \\ P(X_k = 2) \\ P(X_k = 3) \end{pmatrix}$$

7. Déterminer V_0 et V_1

8. Pour $k \in \mathbb{N}$, représenter le graphe orienté et pondéré qui représente la transition entre l'étape k et l'étape $k+1$

9. **a.** Déterminer les probabilités $P_{(X_k=j)}(X_{k+1} = i)$, pour tout couple (i, j) de $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$

b. On admet que $\{(X_k = 1), (X_k = 2), (X_k = 3)\}$ est un système complet d'événements.
Montrer, grâce à la formule des probabilités totales, que

$$P(X_{k+1} = 1) = \frac{1}{2}P(X_k = 2) + \frac{1}{2}P(X_k = 3)$$

Trouver des relations analogues pour $P(X_{k+1} = 2)$ et $P(X_{k+1} = 3)$

c. Déterminer la matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, telle que, pour tout entier naturel k, on a $V_{k+1} = AV_k$

10. **a.** Exprimer A en fonction de M, où M est la matrice définie dans la **partie I**
En déduire pour tout entier naturel k et à l'aide du résultat de la question **9.c.**, une expression de V_{k+1} en fonction de M, V_k et k

b. En déduire, pour tout entier naturel $k, V_k = \dfrac{1}{2^k}M^k V_0$

c. En utilisant le résultat de la question **1.f.**, en déduire que la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une variable aléatoire X, c'est-à-dire $P(X = 1) = \lim\limits_{k\to+\infty} P(X_k = 1)$, $\quad P(X = 2) = \lim\limits_{k\to+\infty} P(X_k = 2)$ et $P(X = 3) = \lim\limits_{k\to+\infty} P(X_k = 3)$
Puis, reconnaitre la loi de la variable aléatoire X

d. Avec Python, écrire une commande qui simule 100 réalisations de la variable aléatoires X

11. Soit V la matrice colonne de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à $\dfrac{1}{3}$
Calculer AV et exprimer le résultat en fonction de V

12. Comparer et commenter les résultats des questions **10.c.** et **11.**