

Plan de travail

Notion	Exercices a minima	Mais aussi
Calcul de primitive	1, 2 et 3	tous
Calcul d'intégrale	4, 6, 7, 8, 9	5
IPP - changement de variable	10 à 12, 14, 17, 18	13, 15, 16, 19, 20
Techniques classiques	21, 22, 24, 25	23, 26, 27

Calcul direct de primitives

Exercice 1 - les primitives évidentes

Donner une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

fonction	primitive	fonction	primitive
$x \mapsto 5$		$x \mapsto 2x$	
$x \mapsto 3x^2$		$x \mapsto nx^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$	
$x \mapsto \frac{1}{x}$		$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	
$x \mapsto e^x$		$x \mapsto \alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$	

Exercice 2

Donner une primitive des fonctions suivantes en précisant les intervalles de validité :

$$\begin{array}{lll}
 f_1(x) = e^{-3x+1} & f_4(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2} & f_6(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{1} \\
 f_2(x) = \frac{1}{2+x} & f_5(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} & f_7(x) = \frac{1}{\sqrt{1+2x}} \\
 f_3(x) = \frac{1}{2-x} & & f_8(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}
 \end{array}$$

Exercice 3

Donner une primitive des fonctions suivantes (préciser les intervalles de validité) :

$$\begin{array}{lll}
 x \mapsto e^{2x} & x \mapsto \frac{1}{1+2x} & x \mapsto \frac{1}{(1+x)^3} \\
 x \mapsto e^{-x} & x \mapsto \frac{1}{(1+x)^2} & x \mapsto \frac{1}{(1-x)^3} \\
 x \mapsto xe^{-x^2} & x \mapsto \frac{1}{(1-x)^2} & x \mapsto \frac{x}{1+x^2} \\
 x \mapsto \frac{1}{1+x} & & x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}} \\
 x \mapsto \frac{1}{1-x} & &
 \end{array}$$

Calcul direct d'intégrales

Exercice 4

Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{array}{ll}
 I_1 = \int_0^1 e^{-2x+1} dx & I_3 = \int_0^1 (1+x)^3 dx \\
 I_2 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx & I_4 = \int_0^1 (e^x + e^{-x})^2 dx
 \end{array}$$

Exercice 5

Soit f la fonction définie par : $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \leq t < 0 \\ te^{-t^2} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$

On admet que f est continue sur $\mathbb{R}$

Calculer $\int_{-1}^x f(t)dt$ pour $x > -1$ en séparant les cas $x < 0$ et $x > 0$

Exercice 6

Calculer : $I_1 = \int_0^1 e^x dx$

$$I_2 = \int_0^1 x^3 dx$$

$$I_3 = \int_1^e \frac{1}{x} dx$$

$$I_4 = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$I_5 = \int_0^1 \sqrt{x} dx$$

Exercice 7

Calculer :

$$I_1 = \int_0^1 e^{2x} dx$$

$$I_2 = \int_0^1 x e^{x^2} dx$$

$$I_3 = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$$

$$I_4 = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx$$

Exercice 8

Calculer :

$$I_1 = \int_0^1 e^{-x} dx$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$$

$$I_3 = \int_0^1 \sqrt{x+1} dx$$

$$I_4 = \int_0^1 \frac{1}{(1+2x)^2} dx$$

Exercice 9

Calculer : $I_1 = \int_0^1 (2 - 3x + 5x^2 - 12x^3) dx$

$$I_2 = \int_0^1 (2e^x + 3x) dx$$

$$I_3 = \int_0^1 (2e^{-x} + 3x^2) dx$$

Intégration par parties**Exercice 10**

Calculer $\int_0^1 x e^x dx$

Exercice 11

Soit $x > 0$, calculer $\int_1^x \ln(t) dt$ par intégration par parties.

En déduire une primitive de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Exercice 12

Soit $\varepsilon \in]0, 1]$

Calculer $I(\varepsilon) = \int_\varepsilon^1 \ln(x) dx$, puis calculer $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_\varepsilon^1 \ln(x) dx$

Exercice 13

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$: $I_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t} dt$

a) Calculer $I_0(x)$ pour $x \geq 0$ et calculer $J_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} I_0(x)$

b) Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n(x) = -x^n e^{-x} + n I_{n-1}(x)$
En déduire, par récurrence que $J_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} I_n(x)$ est finie et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad J_n = n J_{n-1}$$

c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad J_n = n!$

Exercice 14 - classique

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 t^n e^{-t} dt$

1) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$(n+1)I_n = \frac{1}{e} + I_{n+1}$$

2) A l'aide d'une majoration de l'intégrale, montrer que

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1} \text{ et en déduire } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$$

3) Déterminer la limite de $n I_n$ quand $n \rightarrow +\infty$

Exercice 15

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_1^e \left(\frac{t}{e}\right)^n \ln(t) dt$

1. Montrer que : $(n+1)I_n = e - \frac{e - e^{-n}}{n+1}$
2. En déduire la limite de $(n+1)I_n$ quand $n \rightarrow +\infty$

Exercice 16

Soit $x > 1$ et n un entier $n \geq 2$, on pose $I_n(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{t^n} dt$

Calculer $I_n(x)$ à l'aide d'une intégration par parties.

En déduire que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} I_n(x) = \frac{1}{(n-1)^2}$

Changement de variable**Exercice 17**

Calculer $\int_1^e \frac{1}{x(1+\ln(x))} dx$ par le changement de variables $u = \ln(x)$

Exercice 18

Soit $I = \int_{-1}^1 \frac{x}{1+x^2} dx$

1. Montrer à l'aide du changement de variables $s = -x$ que $I = 0$
2. Plus généralement, montrer que :
 - pour une fonction f impaire : $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$
 - pour une fonction f paire : $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$

Exercice 19

Calculer $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx$ par le changement de variables $u = e^x$

Exercice 20

Calculer $\int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx$ par le changement de variables $u = 1+e^x$

Suites d'intégrales**Exercice 21**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$

Montrer que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

Exercice 22

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$

1. Vérifier que $1 - I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$
2. En déduire que $0 \leq 1 - I_n \leq \frac{1}{n+1}$ puis en déduire la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$

Exercice 23

Dans cet exercice, on fixe $x \in]0, 1[$

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$

1. On pose $T_n(t) = \sum_{j=0}^{n-1} t^j$, montrer que $S_n(x) = \int_0^x T_n(t) dt$

2. Calculer $\int_0^x \frac{1}{1-t} dt$

3. Ecrire $T_n(t)$ comme un quotient.

En déduire que $-\ln(1-x) - S_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$

4. Montrer que $0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{1-x}$

5. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = -\ln(1-x)$

Fonctions définies par une intégrale

Exercice 24

Dériver la fonction G dans chaque cas, en précisant l'intervalle de validité.

a) $G(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$

c) $G(x) = \int_1^{x^2} \frac{e^t}{\sqrt{t}} dt$

b) $G(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$

d) $G(x) = \int_x^{2x} \ln(1+t^2) dt$

Autres

Exercice 25

Calculer : $I_1 = \int_{-1}^1 e^{-|x|} dx$ et $I_2 = \int_{-2}^1 \frac{1}{1+|x|} dx$

Exercice 26

On pose, $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$

1. Calculer I_0 et I_1

2. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{e}{n!}$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

3. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!}$

4. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$

5. En déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$

Exercice 27

On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie pour tout entier n strictement positif par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x} dx$$

1. Calculer le premier terme u_1 de la suite.

2. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de réels positifs.

3. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante.

4. Montrer que l'on a, pour tout entier n strictement positif :

$$u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n}$$

5. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ admet une limite et la déterminer.

6. Déduire de la question 4. une fonction Python qui prend un entier n strictement positif et qui renvoie u_n , le $n^{\text{ème}}$ terme de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

7. Établir, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la double inégalité :

$$\frac{1}{n} \leq 2u_n \leq \frac{1}{n-1}$$

En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

8. À l'aide de l'inégalité précédente, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n$