

**Calcul direct de primitives**

**Exercice 1** - les primitives évidentes

Donner une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

fonction	primitive	fonction	primitive
$x \mapsto 5$	$x \mapsto 5x$	$x \mapsto 2x$	$x \mapsto x^2$
$x \mapsto 3x^2$	$x \mapsto x^3$	$x \mapsto nx^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$	$x \mapsto x^n$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \ln x $	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \mapsto \sqrt{x}$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$	$x \mapsto \alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$	$x \mapsto x^\alpha$

**Exercice 2**

Donner une primitive des fonctions suivantes en précisant les intervalles de validité :

$$f_1(x) = e^{-3x+1} \quad F_1(x) = -\frac{1}{3}e^{-3x+1}$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2+x} \quad F_2(x) = \ln|2+x| \text{ sur } \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

$$f_3(x) = \frac{1}{2-x} \quad F_3(x) = -\ln|2-x| \text{ sur } \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$f_4(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2} \quad F_4(x) = -\frac{1}{2}(1+x^2)^{-1} = -\frac{1}{2(1+x^2)} \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$f_5(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad F_5(x) = -2\sqrt{1-x} \text{ sur } ]-\infty, 1[$$

$$f_6(x) = \sqrt{1-x} \quad F_6(x) = -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} \text{ sur } ]-\infty, 1]$$

$$f_7(x) = \frac{1}{\sqrt{1+2x}} \quad F_7(x) = \sqrt{1+2x} \text{ sur } \left] -\frac{1}{2}, +\infty \right[$$

$$f_8(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad F_8(x) = \sqrt{1+x^2} \text{ sur } \mathbb{R}$$

**Exercice 3**

Donner une primitive des fonctions suivantes (préciser les intervalles de validité) :

$$f(x) = e^{2x}, F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$f(x) = e^{-x}, F(x) = -e^{-x} \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$f(x) = xe^{-x^2}, F(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2} \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, F(x) = \ln|x+1| \text{ sur } ]-\infty, -1[ \cup ]-1, +\infty[$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, F(x) = -\ln|1-x| \text{ sur } ]-\infty, 1[ \cup ]1, +\infty[$$

$$f(x) = \frac{1}{1+2x}, F(x) = \frac{1}{2} \ln|1+2x| \text{ sur } ]-\infty, -1/2[ \cup ]-1/2, +\infty[$$

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}, F(x) = -\frac{1}{1+x} \text{ sur } ]-\infty, -1[ \cup ]-1, +\infty[$$

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, F(x) = \frac{1}{1-x} \text{ sur } ]-\infty, 1[ \cup ]1, +\infty[$$

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^3}, F(x) = -\frac{1}{2(1+x)^2} \text{ sur } ]-\infty, -1[ \cup ]-1, +\infty[$$

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^3}, F(x) = \frac{1}{2(1-x)^2} \text{ sur } ]-\infty, 1[ \cup ]1, +\infty[$$

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}, F(x) = \ln(1+x^2) \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}, F(x) = 2\sqrt{x+1} \text{ sur } ]-1, +\infty[$$

### Exercice 5

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \leq t < 0 \\ te^{-t^2} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$

On admet que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$

Calculer  $\int_{-1}^x f(t)dt$  pour  $x > -1$  en séparant les cas  $x < 0$  et  $x > 0$

1<sup>er</sup> cas : si  $x \in ]-1, 0[$

comme  $\forall t \in ]-1, 0[$ ,  $f(t) = 1$ ,

alors par définition  $\int_{-1}^x f(t)dt = \int_{-1}^x 1dt = [t]_{-1}^x = x - (-1) = x + 1$

2<sup>ème</sup> cas : si  $x > 0$

alors d'après la relation de Chasles,

$$\int_{-1}^x f(t)dt = \int_{-1}^0 f(t)dt + \int_0^x f(t)dt = \int_{-1}^0 1dt + \int_0^x te^{-t^2}dt$$

or  $\int_{-1}^0 f(t)dt = [t]_{-1}^0 = 0 - (-1) = 1$  et

$$\int_0^x te^{-t^2}dt = \left[ -\frac{1}{2}e^{-t^2} \right]_0^x = -\frac{1}{2}e^{-x^2} - \left( -\frac{1}{2}e^{-0^2} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 - e^{-x^2} \right)$$

car  $t \mapsto -\frac{1}{2}e^{-t^2}$  est une primitive de  $t \mapsto te^{-t^2}$

finalement dans ce cas  $\int_{-1}^x f(t)dt = 1 + \frac{1}{2} \left( 1 - e^{-x^2} \right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}e^{-x^2}$

### Exercice 6

$$\begin{aligned} \text{Calculer : } I_1 &= \int_0^1 e^x dx = e - 1 & I_2 &= \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4} \\ I_3 &= \int_1^e \frac{1}{x} dx = 1 & I_4 &= \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2(\sqrt{2} - 1) & I_5 &= \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

### Exercice 7

Calculer :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 e^{2x} dx = \frac{e^2 - 1}{2} & I_3 &= \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = \ln(2) \\ I_2 &= \int_0^1 xe^{x^2} dx = \frac{1}{2}(e - 1) & I_4 &= \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

### Exercice 8

Calculer :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 e^{-x} dx = 1 - \frac{1}{e} & I_3 &= \int_0^1 \sqrt{x+1} dx = \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1) \\ I_2 &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx = 2(\sqrt{2} - 1) & I_4 &= \int_0^1 \frac{1}{(1+2x)^2} dx = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

### Exercice 9

$$\begin{aligned} \text{Calculer : } I_1 &= \int_0^1 (2 - 3x + 5x^2 - 12x^3) dx = \frac{5}{6} \\ I_2 &= \int_0^1 (2e^x + 3x) dx = 2e - \frac{1}{2} & I_3 &= \int_0^1 (2e^{-x} + 3x^2) dx = 3 - \frac{2}{e} \end{aligned}$$

## Suites d'intégrales

### Exercice 22

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$

1. Vérifier que  $1 - I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$

$$\begin{aligned} I_n + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1+x^n}{1+x^n} dx = \int_0^1 1 dx = [x]_0^1 = 1 \end{aligned}$$

$$\text{donc } I_n + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx = 1 \text{ et donc } \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx = 1 - I_n$$

2. En déduire que  $0 \leq 1 - I_n \leq \frac{1}{n+1}$  puis en déduire la limite de  $I_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$

$$\forall x \in [0, 1], 1 + x^n \geq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{1+x^n} \leq 1 \text{ donc } 0 \leq \frac{x^n}{1+x^n} \leq x^n$$

$$\text{donc par croissance de l'intégrale, } 0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx \leq \int_0^1 x^n dx$$

$$\text{d'où } 0 \leq 1 - I_n \leq \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \text{ et avec le théorème des gendarmes, on déduit : } 1 - I_n \rightarrow 0 \text{ donc } I_n \rightarrow 1$$

### Exercice 23

Dans cet exercice, on fixe  $x \in ]0, 1[$

On pose, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$

1. On pose  $T_n(t) = \sum_{j=0}^{n-1} t^j$ , montrer que  $S_n(x) = \int_0^x T_n(t) dt$

D'après la linéarité de l'intégrale :  $\int_0^x T_n(t) dt = \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^x t^j dt$

$$\text{Pour } j \in [0, n-1], \int_0^x t^j dt = \left[ \frac{t^{j+1}}{j+1} \right]_0^x = \frac{x^{j+1}}{j+1}$$

$$\text{donc } \int_0^x T_n(t) dt = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^{j+1}}{j+1} = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} = S_n(x)$$

2. Calculer  $\int_0^x \frac{1}{1-t} dt$

$$\int_0^x \frac{1}{1-t} dt = [-\ln|1-t|]_0^x = -\ln|1-x| = -\ln(1-x)$$

car  $x < 1 \Rightarrow 1-x > 0$

3. Ecrire  $T_n(t)$  comme un quotient.

$$\text{En déduire que } -\ln(1-x) - S_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$$

$$T_n(t) = \frac{1-t^n}{1-t} \text{ pour } t \neq 1 \text{ (somme des termes suite géométrique)}$$

On en déduit avec la linéarité de l'intégrale

$$-\ln(1-x) - S_n(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt - \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t} dt = \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$$

4. Montrer que  $0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{1-x}$

$$t \leq x \Rightarrow -t \geq -x \Rightarrow 1-t \geq 1-x \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{1-t} \leq \frac{1}{1-x}$$

$$\text{donc } \forall t \in [0, x] \quad 0 \leq \frac{t^n}{1-t} \leq \frac{t^n}{1-x}$$

$$\text{donc par croissance de l'intégrale, } 0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-x} dt$$

$$\text{et } \int_0^x \frac{t^n}{1-x} dt = \frac{1}{1-x} \int_0^x t^n dt = \frac{1}{1-x} \left[ \frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^x = \frac{1}{1-x} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Enfin, comme  $0 \leq x \leq 1 : 0 \leq x^{n+1} \leq 1$ , donc

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{1-x} \times \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{n+1}$$

5. En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = -\ln(1-x)$

On en déduit, pour  $x \in [0, 1[$  ( $x$  fixé)

$$0 \leq -\ln(1-x) - S_n(x) \leq \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{n+1}$$

donc d'après le théorème des gendarmes,  $-\ln(1-x) - S_n(x) \rightarrow 0$  et donc  $S_n(x) \rightarrow -\ln(1-x)$  (attention, c'est  $n$  qui tend vers

$+\infty$ ), donc la série  $\sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k}$  converge pour  $x \in [0, 1[$ , et sa somme

$$\text{vaut } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = -\ln(1-x)$$

## Autres

### Exercice 25

$$\text{Calculer : } I_1 = \int_{-1}^1 e^{-|x|} dx = 2 \left(1 - \frac{1}{e}\right) \text{ et } I_2 = \int_{-2}^1 \frac{1}{1+|x|} dx = \ln(3) + \ln(2)$$

### Exercice 27

On note  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite définie pour tout entier  $n$  strictement positif

$$\text{par : } u_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x} dx$$

1. Calculer le premier terme  $u_1$  de la suite.

$$\text{Par définition } u_1 = \int_0^1 \frac{x^{1-1}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln|1+x|]_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$$

car  $x \mapsto \ln|1+x|$  est une primitive de  $x \mapsto \frac{1}{1+x}$

2. Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de réels positifs.

$\forall x \in [0, 1], \frac{x^{n-1}}{1+x} \geq 0$  donc  $u_n$  est l'intégrale d'une fonction positive (avec  $a < b$ ) donc  $u_n \geq 0$

3. Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite décroissante.

$$\text{Pour } n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1-1}}{1+x} dx - \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x} dx =$$

$$\int_0^1 \left( \frac{x^n}{1+x} - \frac{x^{n-1}}{1+x} \right) dx = \int_0^1 \frac{x^n - x^{n-1}}{1+x} dx$$

$$\text{donc } u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}(x-1)}{1+x} dx, \text{ et } \forall x \in [0, 1], \frac{x^{n-1}}{1+x} \geq 0 \text{ et}$$

$$x-1 \leq 0 \text{ donc } \frac{x^{n-1}(x-1)}{1+x} \leq 0$$

donc  $u_{n+1} - u_n$  vaut l'intégrale d'une fonction négative (avec  $a < b$ ), donc  $u_{n+1} - u_n \leq 0$ , i.e.  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante

4. Montrer que l'on a, pour tout entier  $n$  strictement positif :

$$u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n}$$

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}^*, \text{ alors de même, } u_{n+1} + u_n = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n-1}}{1+x} dx =$$

$$\int_0^1 \frac{x^{n-1}(x+1)}{1+x} dx = \int_0^1 x^{n-1} dx$$

$$\text{donc } u_{n+1} + u_n = \left[ \frac{x^n}{n} \right]_0^1 = \frac{1^n}{n} - \frac{0^n}{n} = \frac{1}{n}$$

5. Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  admet une limite et la déterminer.

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante et minorée (par 0 par exemple), donc elle converge d'après le théorème de la limite monotone et en notant  $\ell$  sa limite,  $u_n \rightarrow \ell \Rightarrow u_{n+1} \rightarrow \ell$  par propriété

donc  $u_{n+1} + u_n \rightarrow 2\ell$  par addition, de plus  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$  (limite usuelle)

$$\text{et } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n}$$

donc par unicité de la limite  $2\ell = 0$  et donc  $\ell = 0$

6. Dédurre de la question 4. une fonction Python qui prend un entier  $n$  strictement positif et qui renvoie  $u_n$ , le  $n^{\text{ème}}$  terme de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ . La relation de la question 4. nous permet de trouver le terme d'indice  $n + 1$  qui vaut  $\frac{1}{n}$  moins le terme d'indice  $n$ . En partant de  $u_1 = \ln(2)$  on calcule  $u_n$  de manière itérative grâce à cette formule.

```
import numpy as np

def u(n):
    u=np.log(2)
    for i in range(2, n+1)
        u=1/(i-1)-u
    return u
```

7. Établir, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2, la double inégalité :  $\frac{1}{n} \leq 2u_n \leq \frac{1}{n-1}$ . En déduire la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

Soit  $n \geq 2$ , d'après 3.  $u_{n+1} \leq u_n$  donc  $u_{n+1} + u_n \leq 2u_n$ , or d'après

$$4. u_n + u_{n+1} = \frac{1}{n} \text{ donc } \frac{1}{n} \leq 2u_n$$

de même  $u_n \leq u_{n-1} \Rightarrow 2u_n \leq u_n + u_{n-1}$  i.e.  $2u_n \leq \frac{1}{n-1}$  (car  $n \geq 2$ ) d'où le résultat

puis on retrouve la limite avec le théorème des gendarmes car  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$  et  $\frac{1}{n+1} \rightarrow 0$

8. À l'aide de l'inégalité précédente, déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n$

D'après 7.,  $\forall n \geq 2, 1 \leq 2nu_n \leq \frac{n}{n-1} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq nu_n \leq \frac{1}{2} \times \frac{n}{n-1}$   
 or  $\frac{n}{n-1} = \frac{n-1}{n-1} + \frac{1}{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1} \rightarrow 1$  donc par théorème des gendarmes,  $nu_n \rightarrow \frac{1}{2}$