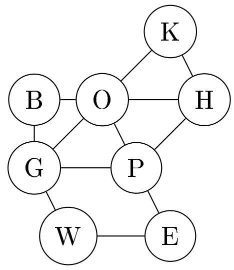
ECG 1 - maths appli. **Devoir en temps libre n°12** Pour le 2 juin 2025

Corrigé *total sur 15 points*

Exercice 1

7 points

On modélise une partie du métro londonien par le graphe ci-contre.
Les sommets du graphe représentent les stations suivantes :



B : Bond Street	K : King's Cross St Pancras
E : Embankment	O : Oxford Circus
G : Green Park	P : Piccadilly Circus
H : Holborn	W : Westminster

1. Préciser toutes les caractéristiques du graphe. *1 point*

Il s'agit d'un graphe non orienté et simple (il ne comporte pas d'arêtes multiples entre deux mêmes sommets, ni de boucle). Le graphe est d'ordre 8 car il comporte 8 sommets dont :
- 4 sommets de degré 2 (B, E, K, W),
- 1 sommet de degré 3 (H),
- 2 sommets de degré 4 (G et P) et
- 1 sommet de degré 5 (O).

Le graphe contient 12 arêtes (on peut vérifier la formule d'Euler pour s'amuser).

2. Déterminer le nombre de trajets pour se rendre de Westminster à King's Cross St Pancras en passant par trois stations (intermédiaires). *1 point*

Il y a 6 chaines de longueur 4 pour réaliser ce trajet :
$W-G-B-O-K$
$W-G-O-H-K$
$W-G-P-O-K$
$W-G-P-H-K$
$W-E-P-O-K$
$W-E-P-H-K$

3. Donner la matrice d'adjacence de ce graphe. *1,5 pts*

En prenant les sommets par ordre alphabétique :

$B=1$, $E=2$, $G=3$, $H=4$, $K=5$, $O=6$, $P=7$, $W=8$

$$\begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&1\\ 1&0&0&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&1&1&1&0\\ 0&0&0&1&0&1&0&0\\ 1&0&1&1&1&0&1&0\\ 0&1&1&1&0&1&0&0\\ 0&1&1&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

4. Retrouver les résultats de la question **2.** à l'aide de Python. *2 points*
On précisera les commandes et le raisonnement.

On rentre la matrice d'adjacence dans Python, puis à l'aide de la commande `al.matrix_ power(M,4)` , on calcule la puissance 4 de la matrice (il faut importer la bibliothèque `numpy.linalg` au préalable).
Il faut alors lire le coefficient M^4_{58} ou M^4_{85} pour retrouver le résultat de la question **2.** (on retrouve bien 6)

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al
# on définit la matrice d'adjacence
M=np.array([[0 , 0 , 1 , 0 , 0 , 1 , 0 , 0],[0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 1 , 1],
[1 , 0 , 0 , 0 , 0 , 1 , 1 , 1], [0 , 0 , 0 , 0 , 1 , 1 , 1 , 0],
[0 , 0 , 0 , 1 , 0 , 1 , 0 , 0],[1 , 0 , 1 , 1 , 1 , 0 , 1 , 0],
[0 , 1 , 1 , 1 , 0 , 1 , 0 , 0],[0 , 1 , 1 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0]])
al.matrix_power(M,4)
```

5. Ce graphe est-il connexe ? possède-t-il une chaine eulérienne ? un cycle eulérien ? *1,5 points*

De manière évidente (cela se voit à l'œil nu), le graphe est connexe. On peut tester le critère de connexité avec Python (cf. programme ci-dessous), à savoir calculer $I_8 + M + M^2 + \cdots + M^7$ et vérifier que ses coefficients sont tous strictement positifs, ce qui est largement le cas (c'était déjà le cas pour M^4).

```
M_C=np.zeros([8,8]) # matrice de connexité, ne contient que des zéros au début
for k in range (0,8):
    M_C=M_C+al.matrix_power(M,k) # on complète en ajoutant les puissances (entre 0 et 7) de M
```

Le graphe est connexe et deux sommets exactement sont de degré impair, donc le graphe possède au moins une chaine eulérienne car seulement, mais pas de cycle eulérien.

Exercice 2 - exercice 26 de la feuille intégration

8 points

On pose, $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n e^t \mathrm{d}t$

1. Calculer I_0 et I_1 *2 points*

Par définition $I_0=\dfrac{1}{0!}\displaystyle\int_0^1(1-t)^0e^t\mathrm{d}t=\int_0^1 e^t\mathrm{d}t=\left[e^t\right]_0^1=e-1$ et $I_1=\dfrac{1}{1!}\displaystyle\int_0^1(1-t)^1e^t\mathrm{d}t=\int_0^1(1-t)e^t\mathrm{d}t$ on réalise alors une intégration par parties : en posant $u'(t)=e^t$ et $v(t)=(1-t)$ on a alors $u(t)=e^t$ et $v'(t)=-1$ donc $\displaystyle\int_0^1(1-t)e^t\mathrm{d}t=\left[(1-t)e^t\right]_0^1-\int_0^1-e^t\mathrm{d}t=0-e^0+\int_0^1 e^t\mathrm{d}t=-1+I_0=-1+e-1=e-2$

2. Montrer : $\forall n\in\mathbb{N},0\leqslant I_n\leqslant\dfrac{e}{n!}$ et en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}I_n$ *2 points*

$\forall t\in[0,1],-1\leqslant -t\leqslant 0$ donc $0\leqslant 1-t\leqslant 1$
et donc par croissance de la fonction $x\mapsto x^n$ (car $n\geqslant 0$) $0\leqslant(1-t)^n\leqslant 1^n$ i.e. $0\leqslant(1-t)^n\leqslant 1$
et par ailleurs $t\in[0,1]\Rightarrow e^t\leqslant e$ (car l'exponentielle est croissante)
donc en faisant le produit de ces deux inégalités (de termes positifs), $(1-t)^ne^t\leqslant e$
donc par croissance de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^1(1-t)^ne^t\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1 e\mathrm{d}t$ i.e. $\displaystyle\int_0^1(1-t)^ne^t\mathrm{d}t\leqslant e$
car $\displaystyle\int_0^1 e\mathrm{d}t=[e\times t]_0^1=e\times 1-e\times 0=e$ et donc $\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1(1-t)^ne^t\mathrm{d}t\leqslant\dfrac{1}{n!}\times e$ i.e. $I_n\leqslant\dfrac{e}{n!}$
et on en déduit par théorème des gendarmes que $I_n\to 0$ car $n!\to+\infty$ (puisque $n!\geqslant n$) et donc $\dfrac{e}{n!}\to 0$

3. Montrer : $\forall n\in\mathbb{N},I_{n+1}=I_n-\dfrac{1}{(n+1)!}$ *2 points*

On procède à nouveau par intégration par parties :
en posant $u'(t)=e^t$ et $v(t)=(1-t)^{n+1}$ on a alors $u(t)=e^t$ et $v'(t)=(n+1)\times(-1)\times(1-t)^n$

$$\begin{aligned}\text{et donc } I_{n+1}&=\frac{1}{(n+1)}!\int_0^1(1-t)^{n+1}e^t\mathrm{d}t=\frac{1}{(n+1)!}\int_0^1u'(t)v(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{(n+1)!}\left[[u(t)v(t)]_0^1-\int_0^1u(t)v'(t)\mathrm{d}t\right]\\&=\frac{1}{(n+1)!}\left[\left[(1-t)^{n+1}e^t\right]_0^1-\int_0^1(n+1)(-1)(1-t)^ne^t\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{(n+1)!}\left[0-1+(n+1)\int_0^1(1-t)^ne^t\mathrm{d}t\right]\\&=-\frac{1}{(n+1)!}+\frac{n+1}{(n+1)!}\int_0^1(1-t)^ne^t\mathrm{d}t=-\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{n!}\int_0^1(1-t)^ne^t\mathrm{d}t=I_n-\frac{1}{(n+1)!}\end{aligned}$$

car $(n+1)!=(n+1)n!$ donc $\dfrac{n+1}{(n+1)!}=\dfrac{n+1}{(n+1)n!}=\dfrac{1}{n!}$

4. Montrer : $\forall n\in\mathbb{N},I_n=e-\displaystyle\sum_{k=0}^n\frac{1}{k!}$ *1,5 points*

<u>Option 1</u> : par récurrence, pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $P(n)$: $I_n=e-\displaystyle\sum_{k=0}^n\frac{1}{k!}$

<u>Initialisation</u> : $P(0)$ est vraie $\Leftrightarrow I_0=e-\displaystyle\sum_{k=0}^0\frac{1}{k!}=e-\frac{1}{0!}=e-1$ ce qui vrai donc $P(0)$ est vraie

<u>Hérédité</u> : soit $n\in\mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ est vraie ; d'après la question précédente, $I_{n+1}=I_n-\dfrac{1}{(n+1)!}$
donc d'après l'hypothèse de récurrence, $I_{n+1}=e-\displaystyle\sum_{k=0}^n\frac{1}{k!}-\frac{1}{(n+1)!}=e-\left(\sum_{k=0}^n\frac{1}{k!}+\frac{1}{(n+1)!}\right)=e-\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!}$
donc $P(n+1)$ est vraie, d'où l'hérédité et donc par théorème de récurrence, $\forall n\in\mathbb{N},P(n)$ est vraie.

<u>Option 2</u> : par télescopage

d'après la question précédente $\forall k\in\mathbb{N},I_{k+1}-I_k=-\dfrac{1}{(k+1)!}$ donc pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(I_{k+1}-I_k)=-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+1)!}$

or $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(I_{k+1}-I_k)=I_n-I_0$ par télescopage et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+1)!}=\sum_{i=1}^n\frac{1}{i!}$ avec le changement d'indice $i=k+1$

donc $I_n-I_0=-\displaystyle\sum_{i=1}^n\frac{1}{i!}$ donc $I_n=I_0+\displaystyle\sum_{i=1}^n\frac{1}{i!}=e-1-\sum_{i=1}^n\frac{1}{i!}=e-\left(1+\sum_{i=1}^n\frac{1}{i!}\right)=e-\left(\frac{1}{0!}+\sum_{i=1}^n\frac{1}{i!}\right)=e-\sum_{i=0}^n\frac{1}{i!}$
Nota bene : ici, on a montré l'égalité pour $n>0$ mais le cas $n=0$ est facile à démontrer (cf. initialisation).

5. En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^n\frac{1}{k!}$ *0,5 point*

D'après la question précédente, $\displaystyle\sum_{k=0}^n\frac{1}{k!}=e-I_n$

or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}I_n=0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^n\frac{1}{k!}=e-0=e$ (on retrouve le résultat de la série exponentielle : $e^0=\displaystyle\sum_{k=0}^n\frac{0^k}{k!}$)