

Corrigé

Total sur 81 points

Exercice 1

7 points

1. On s'intéresse à l'équation différentielle $\mathcal{E}_1 : y'(t) = -3y(t) + 4e^{-3t}$ a. Donner les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation différentielle $y' = -3y$ 0,5 point

Il s'agit d'une équation homogène linéaire du premier ordre dont les solutions sont, par propriété, les fonctions $t \mapsto \lambda e^{-3t}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

b. Montrer que la fonction $t \mapsto 4te^{-3t}$ est une solution de l'équation différentielle $\mathcal{E}_1$ 1,5 points

Il suffit de vérifier, on appelle f_0 cette fonction

alors en notant $u(t) = 4t$ et $v(t) = e^{-3t}$, on trouve $u'(t) = 4$ et $v'(t) = -3e^{-3t}$

et $f_0 = uv \Rightarrow f_0' = u'v + uv'$ et donc $\forall t \in \mathbb{R}, f_0'(t) = 4e^{-3t} + 4t(-3e^{-3t}) = 4e^{-3t} - 12te^{-3t}$

et $-3f_0(t) + 4e^{-3t} = (-3)4te^{-3t} + 4e^{-3t} = -12te^{-3t} + 4e^{-3t}$

donc $\forall t \in \mathbb{R}, f_0'(t) = -3f_0(t) + 4e^{-3t}$

et donc f_0 est bien une solution particulière de l'équation $y'(t) = -3y(t) + 4e^{-3t}$

c. Déterminer toutes les solutions de $\mathcal{E}_1$ 0,5 point

Par propriété, il suffit de superposer l'ensemble des solutions de l'équation homogène à la solution particulière, et donc l'ensemble des solutions de $\mathcal{E}_1$ est $\mathcal{S} = \{t \mapsto 4te^{-3t} + \lambda e^{-3t}, \lambda \in \mathbb{R}\}$

d. Cette équation admet-elle une situation d'équilibre? 1 point

Il est clair que cette équation n'admet pas de situation d'équilibre car le second membre n'est pas constant. Or, une situation d'équilibre suppose une solution constante, ce qui n'est pas possible.

Nota bene : on peut remarquer que toutes les solutions tendent vers 0 quand t tend vers $+\infty$

par propriété sur les fonctions usuelles $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-3t} = 0$ et par croissance comparée $\lim_{t \rightarrow +\infty} te^{-3t} = 0$

donc par opération, toute solution de $\mathcal{E}_1$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$

or la fonction nulle (i.e. la fonction qui vaut toujours 0) n'est pas solution de l'équation différentielle, donc il ne s'agit pas d'une situation d'équilibre.

2. On s'intéresse à l'équation différentielle $\mathcal{E}_2 : y'' + 5y' - 6y = 18$ a. Résoudre l'équation différentielle $\mathcal{E}_2$ 2 points

Dans un premier temps, on résout l'équation homogène linéaire du second ordre $y'' + 5y' - 6y = 0$ et pour cela on commence par déterminer les racines du trinôme $x^2 + 5x - 6$

or de manière évidente, 1 est une racine, de fait l'autre racine est -6

donc les solutions sont, par propriété, les fonctions $t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{-6t}$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

ensuite, comme le second membre de l'équation est constant, on cherche une solution particulière constante

or avec une fonction f définie par $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = k$ où $k \in \mathbb{R}$

alors $\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = f''(t) = 0$ (car f est constante) et donc :

f solution $\Leftrightarrow -6f(t) = 18 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, -6k = 18 \Leftrightarrow k = -3$

donc $t \mapsto -3$ est une solution particulière de l'équation

donc par propriété, l'ensemble des solutions de $\mathcal{E}_2$ est $\mathcal{S} = \{t \mapsto -3 + \lambda e^t + \mu e^{-6t}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$

b. Déterminer la solution de l'équation différentielle $\mathcal{E}_2$ vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ 1,5 points

Soit f une solution de l'équation $\mathcal{E}_2$, alors d'après la question précédente $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, f(t) = -3 + \lambda e^t + \mu e^{-6t}$ donc $f(0) = -3 + \lambda + \mu$

et $\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = \lambda e^t - 6\mu e^{-6t}$ donc $f'(0) = \lambda - 6\mu$

donc si on souhaite que f vérifie $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$, alors cela entraîne $-3 + \lambda + \mu = 0$ et $\lambda - 6\mu = 1$ soit

$$\begin{cases} \lambda + \mu &= 3 \\ \lambda - 6\mu &= 1 \end{cases}$$

donc en faisant la différence des deux lignes, on trouve, $7\mu = 2$ et donc $\mu = \frac{2}{7}$

de fait $\lambda = 1 + 6\mu = 1 + \frac{12}{7} = \frac{19}{7}$

donc l'unique solution de $\mathcal{E}_2$ vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ est la fonction $t \mapsto -3 + \frac{19}{7}e^t + \frac{2}{7}e^{-6t}$

Exercice 2

Pour tout entier naturel n , on pose pour tout réel x de $[0; 1]$, $g_n(x) = \ln(1 + e^{-nx})$ et $I_n = \int_0^1 g_n(x) dx$ 7,5 points

1. a. Montrer que $\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}, g_{n+1}(x) \leq g_n(x)$ 1 point

$\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N} : nx \leq (n+1)x$ donc $-nx \geq -(n+1)x$ donc $e^{-nx} \geq e^{-(n+1)x}$ par croissance de la fonction exponentielle
donc $1 + e^{-nx} \geq 1 + e^{-(n+1)x}$ donc $\ln(1 + e^{-nx}) \geq \ln(1 + e^{-(n+1)x})$ par croissance du logarithme népérien, soit $g_{n+1}(x) \leq g_n(x)$

- b. En déduire que la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est décroissante. 0,5 point

Comme $\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}, g_{n+1}(x) \leq g_n(x)$ alors $I_{n+1} \leq I_n$ par croissance de l'intégrale (et car $0 \leq 1$).
donc la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.

- c. Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est convergente. 0,5 point

$\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq g_n(x)$ (d'après la partie 1, question 3.d)) donc par positivité de l'intégrale, $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n$.
Comme la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est décroissante et minorée par 0 alors la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est convergente d'après le théorème de la limite monotone.

2. a. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel n , 1,5 points

$$I_n = \ln(1 + e^{-n}) + n \int_0^1 \frac{xe^{-nx}}{1 + e^{-nx}} dx$$

Pour tout entier naturel n , posons $u'(x) = 1$ et $v_n(x) = \ln(1 + e^{-nx})$

on peut alors avoir $u(x) = x$ et $v'_n(x) = \frac{-ne^{-nx}}{1 + e^{-nx}}$

donc, par intégration par parties :

$$I_n = [x \ln(1 + e^{-nx})]_0^1 - \int_0^1 x \frac{(-ne^{-nx})}{1 + e^{-nx}} dx = \ln(1 + e^{-n}) + n \int_0^1 \frac{xe^{-nx}}{1 + e^{-nx}} dx \text{ par linéarité de l'intégrale.}$$

- b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \ln(1 + e^{-n}) + n \int_0^1 xe^{-nx} dx$ 1,5 points

D'après 1.b., $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n$

de plus, $\forall x \in [0; 1], \forall n \in \mathbb{N}, e^{-nx} \geq 0$ donc $1 + e^{-nx} \geq 1$ et donc $1 \geq \frac{1}{1 + e^{-nx}}$ par décroissance de la fonction

inverse sur $]0, +\infty[$ et donc $\frac{xe^{-nx}}{1} \geq \frac{xe^{-nx}}{1 + e^{-nx}}$ (car $xe^{-nx} \geq 0$)

par croissance de l'intégrale (car $0 \leq 1$), il en résulte que $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 \frac{xe^{-nx}}{1 + e^{-nx}} dx \leq \int_0^1 xe^{-nx} dx$

ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \ln(1 + e^{-n}) + n \int_0^1 \frac{xe^{-nx}}{1 + e^{-nx}} dx \leq \ln(1 + e^{-n}) + n \int_0^1 xe^{-nx} dx$

i.e. (d'après 2.a.) $0 \leq I_n \leq \ln(1 + e^{-n}) + n \int_0^1 xe^{-nx} dx$

- c. Pour tout entier naturel n non nul, calculer $\int_0^1 xe^{-nx} dx$ 1,5 points

Pour tout entier naturel n non nul, posons $u'_n(x) = e^{-nx}$ et $v(x) = x$

on peut alors avoir : $u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{-n}$ et $v'(x) = 1$

alors, par intégration par parties :

$$\int_0^1 xe^{-nx} dx = \left[x \frac{e^{-nx}}{-n} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{-n} dx = \frac{-e^{-n}}{n} + \frac{1}{n} \int_0^1 e^{-nx} dx = \frac{-e^{-n}}{n} + \frac{1}{n} \left[\frac{e^{-nx}}{-n} \right]_0^1 = \frac{-e^{-n}}{n} + \frac{1 - e^{-n}}{n^2}$$

- d. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ 1 point

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$ (composition « exp(-∞) ») alors par continuité de ln, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-n}) = \ln(1) = 0$

et donc par opérations $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\ln(1 + e^{-n}) - e^{-n} + \frac{1 - e^{-n}}{n} \right] = 0$ (« $= 0 - 0 + \frac{1 - 0}{+\infty}$ »)

or d'après 2.b. et c. $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \ln(1 + e^{-n}) - e^{-n} + \frac{1 - e^{-n}}{n}$ car $n \int_0^1 xe^{-nx} dx = -e^{-n} + \frac{1 - e^{-n}}{n}$

donc d'après le théorème des gendarmes, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

Exercice 3

28 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$

1. a. Démontrer que f est paire sur $\mathbb{R}$

1 point

Le domaine de définition de f est symétrique par rapport à 0

de plus pour $x \in \mathbb{R}$, alors $f(-x) = \frac{e^{-x}}{e^{-2x} + 1} = \frac{e^{2x}}{e^{2x}} \times \frac{e^{-x}}{e^{-2x} + 1} = \frac{e^{2x} e^{-x}}{e^{2x}(e^{-2x} + 1)} = \frac{e^x}{1 + e^{2x}} = f(x)$
donc f est paire.

- b. Justifier que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, étudier ses variations et ses limites.

2,5 points

$x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{2x}$ sont $\mathcal{C}^1$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) donc f est $\mathcal{C}^1$ en tant que quotient et addition de fonctions $\mathcal{C}^1$

de plus, pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{e^x(e^{2x} + 1) - e^x \times 2e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{e^{3x} + e^x - 2e^{3x}}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{e^x - e^{3x}}{(e^{2x} + 1)^2}$

$f'(x)$ est donc du signe de $e^x - e^{3x}$ que l'on peut écrire $e^x - e^{3x} = e^x(1 - e^{2x})$

or $\forall x \in \mathbb{R}_+, e^{2x} \geq 1 \Rightarrow 1 - e^{2x} \leq 0$ et donc $f'(x) \leq 0$

de fait f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et donc croissante sur $\mathbb{R}_-$ (car elle est paire).

enfin il faut factoriser par les termes dominants pour lever l'indétermination en $+\infty$:

$f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + 1} = \frac{e^x}{e^{2x}} \times \frac{1}{1 + e^{-2x}} = \frac{1}{e^x} \times \frac{1}{1 + e^{-2x}}$ or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + e^{-2x}} = 1$
donc par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et par symétrie, f étant paire, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

- c. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\ell \in \mathbb{R}_+$

2 points

Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $g(x) = f(x) - x$, alors g est $\mathcal{C}^1$ et $g'(x) = f'(x) - 1$

or, comme nous l'avons montré plus haut, pour $x \in \mathbb{R}_+, f'(x) \leq 0$ donc $f'(x) - 1 < 0$, i.e. $g'(x) < 0$

donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, de plus elle est continue, donc d'après le théorème de la bijection, elle

réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x), g(0) \right]$

or $g(0) = f(0) - 0 = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = -\infty$

donc g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\left] -\infty, \frac{1}{2} \right]$

de fait l'équation $f(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$

- d. Justifier que : $0 \leq \ell \leq \frac{1}{2}$

Données numériques : $e^{\frac{1}{2}} \simeq 1,65$ et $e \simeq 2,72$

1 point

Toujours avec g , $g(0) = \frac{1}{2}$ et $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{1 + e} - \frac{1}{2}$ et d'après les données de l'énoncé, $e^{\frac{1}{2}} \geq 1,7$ et $1 + e \geq 3,6$,

donc $\frac{1}{1 + e} \leq \frac{1}{3,6}$ donc $\frac{e^{\frac{1}{2}}}{1 + e} \leq \frac{1,7}{3,6} < \frac{1}{2}$ donc $\frac{e^{\frac{1}{2}}}{1 + e} - \frac{1}{2} < 0$ i.e. $g\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

donc, g étant toujours continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, mais ℓ est l'unique solution de cette équation sur $\mathbb{R}_+$ donc $\ell \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$

Autre option : $\ell \in \mathbb{R}^+$ donc d'après l'étude $0 \leq f(\ell) \leq \frac{1}{2}$ or $\ell = f(\ell)$ donc $0 \leq \ell \leq \frac{1}{2}$

- e. Montrer que : $\forall x > 0, |f'(x)| \leq f(x)$ et en déduire que : $\forall x > 0, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

1,5 point

Comme nous l'avons vu plus haut, pour $x \in \mathbb{R}_+, e^x - e^{3x} \leq 0$ et donc $|f'(x)| = \left| \frac{e^x - e^{3x}}{(e^{2x} + 1)^2} \right| = \frac{e^{3x} - e^x}{(e^{2x} + 1)^2}$

or $e^{2x} + 1 \geq e^{2x}$ donc $\frac{1}{e^{2x} + 1} \leq \frac{1}{e^{2x}}$ (car la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+$)

donc $\frac{e^{3x} - e^x}{e^{2x} + 1} \leq \frac{e^{3x} - e^x}{e^{2x}}$ (car $e^{3x} - e^x \geq 0$) de plus $\frac{e^{3x} - e^x}{e^{2x}} = \frac{e^{3x}}{e^{2x}} - \frac{e^x}{e^{2x}} \leq \frac{e^{3x}}{e^{2x}} = e^x$ donc $\frac{e^{3x} - e^x}{e^{2x} + 1} \leq e^x$

et donc $\frac{1}{e^{2x} + 1} \times \frac{e^{3x} - e^x}{e^{2x} + 1} \leq \frac{1}{e^{2x} + 1} \times e^x$ (car $\frac{1}{e^{2x} + 1} \geq 0$) i.e. $|f'(x)| \leq f(x)$

Option 2 : $e^{3x} - e^x = e^x(e^{2x} - 1)$ or $e^{2x} - 1 \leq e^{2x} + 1$ donc $e^{3x} - e^x \leq e^x(e^{2x} + 1)$

et donc $\frac{e^{3x} - e^x}{e^{2x} + 1} \leq \frac{e^x(e^{2x} + 1)}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$ i.e. $|f'(x)| \leq f(x)$

Option 3 : on calcule $f(x) - |f'(x)|$ (réduction au même dénominateur) et après simplifications, on trouve facilement que c'est positif.

Par ailleurs, d'après la question **1.a.**, f est croissante sur $\mathbb{R}_-$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$, donc f admet un maximum en 0 et $f(0) = \frac{1}{2}$, donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq \frac{1}{2}$

donc on déduit de l'inégalité $|f'(x)| \leq f(x)$, que $\forall x \in \mathbb{R}_+, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

- f. Vérifier que $f\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) \subset \left[0, \frac{1}{2}\right]$ 1 point

Comme nous l'avons vu à la question précédente, $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) \leq \frac{1}{2}$ ($f(0) = \frac{1}{2}$ et f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$)
or $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_+, 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$ et a fortiori $\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$ i.e. $f\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) \subset \left[0, \frac{1}{2}\right]$

2. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$

- a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ 1 point

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit l'assertion $P(n) : u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$

Initialisation : $u_0 = 0$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie

par hypothèse, $u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, or d'après **1.f** si $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ alors $f(x) \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, donc $f(u_n) \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ i.e. $u_{n+1} \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$
donc $P(n+1)$ est vraie d'où l'hérédité et donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie.

- b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N} : |u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ell|$ puis que $|u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ 2,5 points

$|f'|$ est majorée par $\frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}_+$ (d'après **1.e**) et f' est continue car f est $\mathcal{C}^1$

donc d'après l'inégalité des accroissements finis, $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, |f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2}|b - a|$ et en particulier avec $a = \ell$

et $b = u_n$ (qui appartiennent à $\mathbb{R}_+$), on obtient : $|f(u_n) - f(\ell)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ell|$ i.e. $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ell|$
car par définition de ℓ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, f(\ell) = \ell$ et $f(u_n) = u_{n+1}$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose désormais $Q(n) : |u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$

Initialisation : $Q(0)$ est vraie $\Leftrightarrow |u_0 - \ell| \leq \frac{1}{2^1} \Leftrightarrow |\ell| \leq \frac{1}{2}$ ce qui est vrai d'après **1.d.** donc $Q(0)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $Q(n)$ vraie

d'après l'inégalité démontrée au début de la question, $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ell|$

or par hypothèse de récurrence $|u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ donc $\frac{1}{2}|u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{n+2}}$ et donc $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2^{n+2}}$
i.e. $Q(n+1)$ est vraie d'où l'hérédité, donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, Q(n)$ est vraie.

- c. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ 1 point

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 0$ (limite usuelle q^n avec $|q| < 1$)

donc par théorème d'encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \ell| = 0$ ce qui est équivalent à $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$

3. Informatique : avec Python,

- a. écrire une fonction **f** qui prend en entrée un réel x et qui calcule $f(x)$ 0,75 point

```
import numpy as np
def f(x):
    return np.exp(x)/(np.exp(2*x)+1)
```

- b. en utilisant la fonction **f** précédente, écrire une fonction **SuiteU** qui prend en entrée un entier positif n et qui calcule u_n 1,25 points

```
def SuiteU(n):
    u=0
    for i in range(1,n+1):
        u=f(u)
    return u
```

Le calcul des termes de la suite se fait de manière itérative, il faut donc inclure ici une boucle dans la définition de la fonction pour calculer progressivement les valeurs en utilisant la fonction f prédéfinie. On propose ici une variable auxiliaire u que l'on initialise à 0 et qui prendra progressivement les valeurs de la suite (on pourrait aussi définir la fonction de manière récursive). La dernière valeur calculée sera u_n , ce que l'on indique comme résultat en sortie.

- c. en utilisant la fonction `SuiteU` précédente, écrire un programme qui permet d'obtenir une valeur approchée de ℓ à 10^{-6} près ? 1,5 points

Dès lors que $\frac{1}{2^{n+1}} \leq 10^{-6}$, l'inégalité de la question **3.b** entraîne $|u_n - \ell| \leq 10^{-6}$ donc on va calculer progressivement les valeurs $\frac{1}{2^{n+1}}$ jusqu'à ce qu'il devienne inférieur à 10^{-6} , tout en incrémentant n et on saura que la dernière valeur de n entraîne la précision suffisante pour u_n

```
n=0
while 1/2**(n+1)>10**(-6):
    n=n+1
l=SuiteU(n)
print(l)
```

4. Etude de convexité de f et représentation graphique.

- a. Démontrer que f est $\mathcal{C}^2$ et que $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \frac{e^x(1 - 6e^{2x} + e^{4x})}{(1 + e^{2x})^3}$ 2 points

Comme plus haut, f est $\mathcal{C}^2$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) puisqu'il s'agit d'un quotient de fonctions $\mathcal{C}^2$ de plus $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{e^x - e^{3x}}{(1 + e^{2x})^2}$, donc $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \frac{(e^x - 3e^{3x})(1 + e^{2x})^2 - (e^x - e^{3x})4e^{2x}(1 + e^{2x})}{(1 + e^{2x})^4}$
donc $f''(x) = \frac{(e^x - 3e^{3x})(1 + e^{2x}) - 4e^{2x}(e^x - e^{3x})}{(1 + e^{2x})^3} = \frac{e^x + e^{3x} - 3e^{3x} - 3e^{5x} - 4e^{3x} + 4e^{5x}}{(1 + e^{2x})^3} = \frac{e^x - 6e^{3x} + e^{5x}}{(1 + e^{2x})^3}$
finalement on peut écrire $f''(x) = \frac{e^x(1 - 6e^{2x} + e^{4x})}{(1 + e^{2x})^3}$ et donc $f''(x)$ est du signe de $1 - 6e^{2x} + e^{4x} = P(e^x)$ avec P le polynôme défini par $P(x) = x^4 - 6x^2 + 1$

- b. Démontrer que le polynôme $P(x) = x^4 - 6x^2 + 1$ admet une unique racine sur $[1, +\infty[$, que l'on notera α 2 pts

On peut remarquer que $P(x) = (x^2)^2 - 6(x^2) + 1$, donc si x_0 est racine de P alors x_0^2 est racine de $x^2 - 6x + 1$ On étudie alors $x^2 - 6x + 1$ qui a pour discriminant $\Delta = 32$ et pour racines

$$x_1 = \frac{6 - \sqrt{32}}{2} = 3 - 2\sqrt{2} (\geq 0 \text{ car } 6\sqrt{36} \geq \sqrt{32}) \text{ et } x_2 = 3 + 2\sqrt{2} (\geq 0)$$

donc les racines de P sont $\sqrt{x_1}$, $-\sqrt{x_1}$, $\sqrt{x_2}$, $-\sqrt{x_2}$ et $\sqrt{x_2}$, cette dernière est la seule racine sur $[1, +\infty[$ en effet de manière évidente $x_2 \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x_2} \geq \sqrt{1} = 1$ (par croissance de la racine carrée) et $-\sqrt{x_1}$ et $-\sqrt{x_2}$ sont négatives

enfin $1 < 2 < 4 \Rightarrow \sqrt{1} < \sqrt{2} < \sqrt{4}$ (par stricte croissance de la racine carrée)

i.e. $1 < \sqrt{2} < 2$ donc $2 < 2\sqrt{2} < 4$ et donc $-2\sqrt{2} < -2$ et de fait $3 - 2\sqrt{2} < 3 - 2$ i.e. $x_1 < 1$ et donc $\sqrt{x_1} < 1$

Méthode alternative : $P'(x) = 4x^3 - 12x = 4x(x^2 - 3)$, on en déduit alors le signe de P' puis les variations de P sur $[1, +\infty[$ et en particulier qu'il admet une seule racine sur cet intervalle (on trouve P décroissante sur $[1, \sqrt{3}]$ avec $P(1) < 0$ donc P ne peut s'annuler sur cet intervalle, puis P strictement croissante sur $[\sqrt{3}, +\infty[$ avec $P(\sqrt{3}) < 0$ d'après les variations sur $[1, \sqrt{3}]$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty$)

- c. En déduire le signe de f'' sur $\mathbb{R}_+$, puis déterminer la convexité et les éventuels points d'inflexions de f sur $\mathbb{R}_+$
On pourra exprimer les résultats en fonction de α 1 point

Avec l'étude précédente, comme $P(x) = (x + \sqrt{x_2})(x + \sqrt{x_1})(x - \sqrt{x_1})(x - \sqrt{x_2})$, on trouve que $P(x)$ est négatif sur $[1, \alpha]$ et positif sur $[\alpha, +\infty[$

de fait $P(e^x)$ est négatif lorsque $e^x \in [1, \alpha]$ et positif lorsque $e^x \in [\alpha, +\infty[$,

i.e. $P(e^x)$ est négatif lorsque $x \in [0, \ln(\alpha)]$ et positif lorsque $e^x \in [\ln(\alpha), +\infty[$ et donc $f''(x)$ aussi.

donc f est concave sur $[0, \ln(\alpha)]$, convexe sur $[\ln(\alpha), +\infty[$ et f admet un point d'inflexion en $\ln(\alpha)$

- d. On note $\beta = \ln(\alpha)$, donner en fonction de β , l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse β
Quelle est la particularité de cette tangente ? 0,5 point

La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse β a pour équation $y = f'(\beta)(x - \beta) + f(\beta)$

comme il s'agit d'un point d'inflexion, la tangente traverse la courbe au point $(\beta, f(\beta))$, la courbe est en-dessous de la tangente à gauche de β et au-dessus à droite.

- e. Sans calcul, déterminer la convexité et les éventuels points d'inflexions de f sur $\mathbb{R}_-$ 0,5 point

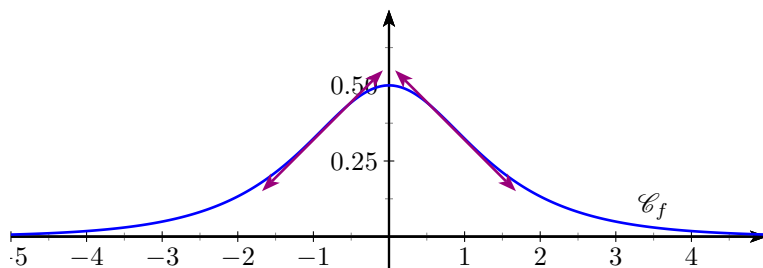
Comme f est paire, on en déduit que f est convexe sur $] +\infty, -\ln(\alpha)]$, concave sur $[-\ln(\alpha), 0]$ et f admet un point d'inflexion en $-\ln(\alpha)$

- f. Représenter f graphiquement. 1,5 points

Données numériques : $\beta \simeq 0,88$

$$f(\beta) \simeq 0,35 \quad \text{et} \quad f'(\beta) = -\frac{1}{4}$$

Le maximum en 0, la tangente au point d'inflexion et la limite nulle en $+\infty$ nous donnent déjà une bonne idée de l'allure de la courbe sur $\mathbb{R}_+$ et par parité, on en déduit l'allure sur $\mathbb{R}_-$



5. Avec Python,

- a. écrire un programme qui représente f sur l'intervalle de votre choix (on considérera que la fonction f est déjà définie). 1 point

On représente f sur l'intervalle $[-5;5]$ ce qui permet d'avoir un bon aperçu de la courbe comme nous l'avons vu plus haut. Cet intervalle contient notamment les deux points d'inflexion.

```
import matplotlib.pyplot as plt
x=np.linspace(-5,5,100)
y=f(x)
plt.plot(x,y)
plt.show()
```

- b. écrire un programme qui permette, à l'aide de l'algorithme de dichotomie, de déterminer α avec une précision de 10^{-3} 2,5 points

D'après l'étude effectuée plus haut, on sait que $\alpha = \sqrt{3+2\sqrt{2}}$ et comme vu précédemment également $2 \leq 2\sqrt{2} \leq 4 \Rightarrow 5 \leq 3+2\sqrt{2} \leq 7$ et a fortiori $4 \leq 3+2\sqrt{2} \leq 9$ et donc par croissance de la racine carrée $\sqrt{4} \leq \sqrt{3+2\sqrt{2}} \leq \sqrt{9}$ i.e. $2 \leq \alpha \leq 3$ on va donc appliquer la méthode au polynôme P que l'on définit dans un premier temps et sur l'intervalle $[2;3]$ il est également nécessaire de savoir que $P(2) < 0$ et $P(3) > 0$

```
def P(x):
    return x**4-6*x**2+1

a = 2
b = 3
while b-a>10**(-3) :
    c = (a+b)/2
    if P(c) < 0:
        a=c
    else:
        b=c
print(c)
```

Problème 1

Soit n un entier avec $n \geq 2$

30,5 points

On considère une urne contenant n boules noires et 2 boules blanches, toutes indiscernables.

Aline effectue des tirages successifs d'une boule sans remise dans l'urne jusqu'à obtenir une boule blanche.

Elle laisse alors la place à un deuxième joueur, Bob, qui effectue des tirages successifs d'une boule avec remise dans l'urne jusqu'à obtenir l'autre boule blanche.

On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules noires tirées par Aline avant de tirer une boule blanche et on appelle Y la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules noires tirées par Bob avant de tirer la boule blanche (s'il ne reste plus de boule noire, on a donc $Y = 0$).

Par exemple, si $n = 9$ et que les tirages successifs ont donné une boule : « noire, blanche, noire, noire, noire, noire, blanche » alors :

- Aline a effectué deux tirages, elle a retiré une boule noire puis une boule blanche de l'urne ;
- l'urne contient maintenant 9 boules : 8 noires et une blanche ;
- Bob a effectué ensuite cinq tirages dans cette urne, il a pioché 4 boules noires qu'il a reposées dans l'urne après chaque tirage puis il a pioché la boule blanche ;
- X vaut 1 et Y vaut 4

Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note B_i l'événement « au $i^{\text{ème}}$ tirage on a obtenu une boule blanche ».

Partie 1 - cas particulier où $n = 2$

On suppose donc ici que l'urne contient initialement 2 boules blanches et 2 boules noires.

20 points

1. Exprimer les événements $[X = 0]$, $[X = 1]$, $[X = 2]$ à l'aide des événements B_1, B_2, B_3

1 point

$[X = 0]$ signifie qu'aucune boule noire n'a été tirée avant de tirer une blanche, donc qu'une blanche a été tirée dès le premier tirage, donc $[X = 0] = B_1$

de même $[X = 1]$ signifie qu'une boule noire a été tirée avant de tirer une blanche, donc $[X = 1] = \bar{B}_1 \cap B_2$

et $[X = 2]$ signifie que deux boules noires ont été tirées avant de tirer une blanche, donc $[X = 2] = \bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 \cap B_3$

2. En déduire les probabilités des événements : $[X = 0], [X = 1], [X = 2]$

1,5 points

$P(X = 0) = P(B_1) = \frac{1}{2}$ (car il y a 2 boules blanches sur les 4 et chaque tirage est équiprobable).
 Pour les autres, les événements ne sont pas indépendants donc on utilise la formule des probabilités composées,
 $P(X = 1) = P(\bar{B}_1)P_{\bar{B}_1}(B_2)$ et $P(X = 2) = P(\bar{B}_1)P_{\bar{B}_1}(\bar{B}_2)P_{\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2}(B_3)$
 or $P(\bar{B}_1) = \frac{1}{2}$, $P_{\bar{B}_1}(B_2) = \frac{2}{3}$ (il reste alors 2 boules blanches sur les 3), de fait $P_{\bar{B}_1}(\bar{B}_2) = \frac{1}{3}$
 et de même $P_{\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2}(B_3) = 1$ (il ne reste alors que 2 boules blanches).
 donc $P(X = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ et $P(X = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{6}$

3. En déduire l'espérance et la variance de X

1,5 points

Par définition $E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2) = \frac{1}{3} + \frac{2}{6} = \frac{2}{3}$
 de même, $E(X^2) = 0^2 \times P(X = 0) + 1^2 \times P(X = 1) + 2^2 \times P(X = 2) = \frac{1}{3} + \frac{4}{6} = 1$ et d'après la formule de
 Kœnig-Huygens, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$

4. Montrer que la probabilité de l'événement $[Y = 0]$ est donnée par : $P(Y = 0) = \frac{1}{2}$

1,5 points

Il y a 3 situations possibles lorsque Bob commence : il reste 2 (cas $X = 0$), une (cas $X = 1$) ou aucune (cas $X = 2$)
 boule(s) noire(s)
 donc d'après la formule des probabilités totales (car $[X = 0], [X = 1], [X = 2]$ forme un système complet d'événements),
 $P(Y = 0) = P(X = 0)P(Y = 0|X = 0) + P(X = 1)P(Y = 0|X = 1) + P(X = 2)P(Y = 0|X = 2)$
 or $P(Y = 0|X = 0) = \frac{1}{3}$ (cas où il ne tire aucune boule noire avant de tirer la blanche restante, sachant qu'ici il reste
 deux boules noires et une boule blanche au moment où il commence)
 $P(Y = 0|X = 1) = \frac{1}{2}$ (cas où il tire une boule noire avant de tirer la blanche restante, sachant qu'ici il reste une boule
 noires et une boule blanche au moment où il commence)
 $P(Y = 0|X = 2) = 1$ (cas où il tire deux boules noire avant de tirer la blanche restante, sachant qu'ici il ne reste qu'une
 boule blanche au moment où il commence)
 donc $P(Y = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times 1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

5. Pour tout entier i tel que $i \geq 1$, déterminer les probabilités suivantes :

2,5 points

$$P([X = 0] \cap [Y = i]), \quad P([X = 1] \cap [Y = i]), \quad P([X = 2] \cap [Y = i])$$

Par définition des probabilités conditionnelles : $P([X = 0] \cap [Y = i]) = P(X = 0)P([Y = i]|[X = 0])$
 $P([X = 1] \cap [Y = i]) = P(X = 1)P([Y = i]|[X = 1])$ et $P([X = 2] \cap [Y = i]) = P(X = 2)P([Y = i]|[X = 2])$
 $[Y = i]$ correspond pour Bob à i tirages d'une noire puis du tirage de la blanche
 donc $P([Y = i]|[X = 0]) = \left(\frac{2}{3}\right)^i \frac{1}{3}$ et donc $P([X = 0] \cap [Y = i]) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^i \frac{1}{3}$ (sachant $[X = 0] \Rightarrow$ quand Bob
 commence à tirer, il reste deux boules noires et une boule blanche)
 de même $P([X = 0] \cap [Y = i]) = \left(\frac{1}{2}\right)^i \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}$ et donc $P([X = 1] \cap [Y = i]) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}$ (sachant $[X = 1] \Rightarrow$
 quand Bob commence à tirer, il reste une boule noire et une boule blanche)
 $P([Y = i]|[X = 2]) = 0$ donc $P([X = 2] \cap [Y = i]) = 0$ (car $i \geq 1$ donc il ne peut tirer aucune boule noire avant de tirer
 la blanche, sachant $[X = 2] \Rightarrow$ quand Bob commence à tirer, il ne reste qu'une boule blanche).

6. En déduire que pour $i \in \mathbb{N}^*$, $P(Y = i) = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^i + \frac{1}{6} \left(\frac{2}{3}\right)^i$

1 point

Comme plus haut, d'après la formule des probabilités totales (car $[X = 0], [X = 1], [X = 2]$ forme un système complet
 d'événements),
 $P(Y = i) = P([X = 0] \cap [Y = i]) + P([X = 1] \cap [Y = i]) + P([X = 2] \cap [Y = i])$
 $= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^i \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} + 0 = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^i + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^i$

7. Que doit valoir $\sum_{i=0}^{+\infty} P(Y = i)$? Vérifier le résultat attendu.

2 points

$Y(\Omega) = \mathbb{N}$, car Bob peut tirer aucune, ou une, deux, ..., n boule(s) noire(s) avant de tirer la blanche (n pouvant être

indéfiniment grand), donc $(Y = i)_{i \in \mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements, de fait $\sum_{i=0}^{+\infty} P(Y = i) = 1$, ce que l'on va vérifier par le calcul : $\sum_{i \geq 1} P(Y = i)$ converge car il s'agit d'une combinaison de deux séries géométriques convergentes

puisque pour $i \geq 1, P(Y = i) = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^i + \frac{1}{6} \left(\frac{2}{3}\right)^i$

d'une part $\sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1$ et d'autre part $\sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^i = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} - 1 = 2$ (attention il faut retranche le premier terme à chaque fois car les sommes commencent à 1)

donc par opérations sur les séries $\sum_{i=1}^{+\infty} P(Y = i) = \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 2 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

or $P(Y = 0) = \frac{1}{2}$ donc $\sum_{i=0}^{+\infty} P(Y = i) = P(Y = 0) + \sum_{i=1}^{+\infty} P(Y = i) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ comme attendu

8. Montrer que Y admet une espérance, et que $E(Y) = \frac{4}{3}$

2 points

Y admet une espérance dès lors que la série $\sum_{i \geq 0} iP(Y = i) = \sum_{i \geq 1} iP(Y = i)$ converge (absolument)

or $\sum_{i \geq 1} iP(Y = i) = \sum_{i \geq 1} i \left(\frac{1}{6} \left(\frac{2}{3}\right)^i + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^i \right)$ (car la formule pour $P(Y = i)$ est valable à partir de $i = 1$)

donc $\sum_{i \geq 1} iP(Y = i) = \frac{1}{6} \sum_{i \geq 1} i \left(\frac{2}{3}\right)^i + \frac{1}{6} \sum_{i \geq 1} i \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} \sum_{i \geq 1} i \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \sum_{i \geq 1} i \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$ (par linéarité deux fois)

or $\sum_{i \geq 1} i \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}$ et $\sum_{i \geq 1} i \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$ sont deux séries géométriques dérivées convergentes car $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$ et $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$

de plus $\sum_{i=1}^{+\infty} i \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} = \frac{1}{(1-\frac{2}{3})^2} = \frac{1}{(\frac{1}{3})^2} = \frac{1}{\frac{1}{9}} = 9$ et $\sum_{i=1}^{+\infty} i \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{(\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$

donc par opérations sur les séries convergentes $\sum_{i \geq 1} iP(Y = i)$ converge et $\sum_{i=1}^{+\infty} iP(Y = i) = \frac{1}{9} \times 9 + \frac{1}{12} \times 4 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

9. On pose $Z = Y(Y - 1)$

a. Déterminer $Z(\Omega)$

1 point

$Z(\Omega)$ est l'image de Ω par Z et donc par $Y(Y - 1) = Y^2 - 1$

or $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ donc $Z(\Omega) = \{n^2 - 1, n \in \mathbb{N}\}$, c'est-à-dire l'ensemble des carrés d'entiers moins 1.

b. Justifier que Z admet une espérance, et calculer $E(Z)$

2 points

On peut écrire $Z = f(Y)$ où f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(x - 1)$ donc par théorème de transfert Z admet une espérance dès lors que $\sum_{i \geq 0} f(i)P(Y = i)$ converge (absolument) car $Y(\Omega) = \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \text{or } \sum_{i \geq 0} f(i)P(Y = i) &= \sum_{i \geq 0} i(i - 1)P(Y = i) = \sum_{i \geq 2} i(i - 1)P(Y = i) = \frac{1}{6} \sum_{i \geq 2} i(i - 1) \left(\frac{2}{3}\right)^i + \frac{1}{6} \sum_{i \geq 2} i(i - 1) \left(\frac{1}{2}\right)^i \\ &= \frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \sum_{i \geq 2} i(i - 1) \left(\frac{2}{3}\right)^{i-2} + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sum_{i \geq 2} i(i - 1) \left(\frac{1}{2}\right)^{i-2} \\ &= \frac{2}{27} \sum_{i \geq 2} i(i - 1) \left(\frac{2}{3}\right)^{i-2} + \frac{1}{24} \sum_{i \geq 2} i(i - 1) \left(\frac{1}{2}\right)^{i-2} \end{aligned}$$

comme plus haut, on a utilisé la linéarité deux fois et on trouve une combinaison linéaire de deux séries géométriques dérivées d'ordre 2 convergentes (de même $|q| < 1$) : $\sum_{i \geq 2} i(i - 1) \left(\frac{2}{3}\right)^{i-2}$ et $\sum_{i \geq 2} i(i - 1) \left(\frac{1}{2}\right)^{i-2}$ convergent

de plus, $\sum_{i=2}^{+\infty} i(i - 1) \left(\frac{2}{3}\right)^{i-2} = \frac{2}{(1-\frac{2}{3})^3} = 2 \times \frac{1}{\frac{1}{27}} = 2 \times 27 = 54$ et $\sum_{i=2}^{+\infty} i(i - 1) \left(\frac{1}{2}\right)^{i-2} = \frac{2}{(1-\frac{1}{2})^3} = 2 \times \frac{1}{\frac{1}{8}} = 16$

donc $\sum_{i \geq 0} f(i)P(Y = i)$ converge et $\sum_{i=0}^{+\infty} f(i)P(Y = i) = \frac{2}{27} \times 54 + \frac{1}{24} \times 16 = 4 + \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$

i.e. Z admet une espérance et $E(Z) = \frac{14}{3}$

10. En déduire que Y admet un moment d'ordre 2 et que $E(Y^2) = 6$ 1 point
 $Z = Y(Y - 1) = Y^2 - Y$ donc $Y^2 = Z + Y$, donc par linéarité de l'espérance, Y^2 admet une espérance, i.e. Y admet un moment d'ordre 2, et $E(Y^2) = E(Z) + E(Y) = \frac{14}{3} + \frac{4}{3} = \frac{18}{3} = 6$

11. Calculer la variance de Y 1 point

D'après la formule de Koenig-Huygens, $V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 6 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{54}{9} - \frac{16}{9} = \frac{38}{9}$

12. Expliquer ce que réalise le programme suivant (on détaillera notamment le résultat de son exécution). 2 points

```
import numpy.random as rd # import de la bibliothèque random pour la loi géométrique
import numpy as np # pour l'utilisation de max, zeros et arange
import matplotlib.pyplot as plt # pour la représentation

x=rd.geometric(0.2,10000) # 10 000 simulations d'une v.a. suivant une loi géométrique
n=np.max(x) # on prend le maximum des valeurs trouvés
y=np.zeros(n) # on crée une liste de n zéros qui sera le compteur

for i in range(0, 10000): # pour chaque réalisation de la variable aléatoire
    j=x[i] # si la valeur de la i-ème expérience est j
    y[j-1]=y[j-1]+1 # on augmente d'une unité la case correspondante dans le compteur
# y contient alors le nombre d'occurrences de chaque valeur
y=y/10000 # y contient maintenant les fréquences d'occurrence de chaque valeur

a=np.arange(1,n+1,1) # crée une liste d'entiers entre 1 et n
z=[(0.8)**i*0.2 for i in range (0,n)] # crée la liste des valeurs théoriques de la loi géométrique
plt.bar(a,y,width=0.8,color='b') # représente les valeurs empiriques sous la forme d'un diagramme en bâtons
plt.bar(a,z,width=0.5,color='r') # représente de même les valeurs théoriques (largeur plus fine)
plt.show()
```

Ce programme simule 10 000 réalisations d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre 0,2 et renvoie un graphique qui permet de comparer les fréquences d'apparition de chaque valeur obtenue de manière empirique par rapport aux valeurs théoriques des probabilités de la loi.

Partie 2 - cas général

On suppose ici que $n > 2$ 7 points

1. Calculer $P(X = 0)$ 1 point

$[X = 0]$ correspond toujours au fait de tirer une boule blanche en premier. Et il y a ici 2 issues favorables sur les $n + 1$ et comme elles sont équiprobables, $P(X = 0) = \frac{2}{n + 2}$

2. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, exprimer l'événement $[X = k]$ à l'aide des événements B_i 1 point

Comme plus haut $[X = k]$ correspond au tirages de k boules noires puis d'une boule blanche

$$\text{donc } [X = k] = \left(\bigcap_{i=1}^k \bar{B}_i \right) \cap B_{k+1}$$

3. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, montrer que $P(X = k) = \frac{2(n - k + 1)}{(n + 1)(n + 2)}$ 1,5 points

En appliquant la formule des probabilités composées à l'expression de $[X = k]$ trouvée ci-dessus,

$$P(X = k) = P(\bar{B}_1)P(\bar{B}_2)P(\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2)(B_3) \dots P(\bar{B}_1 \cap \dots \cap \bar{B}_{k-1})(\bar{B}_k)P(\bar{B}_1 \cap \dots \cap \bar{B}_k)(B_{k+1})$$

$$= \left(\prod_{i=1}^k \frac{n + 1 - i}{n + 3 - i} \right) \frac{2}{n + 2 - k} \text{ car tant qu'uniquement des boules noires ont été tirées, pour en tirer une}$$

au $i^{\text{ème}}$ tirage, il faut prendre en compte que $i - 1$ boules noires ont été retirées sur les n boules noires initialement présentes et sur le total initial de $n + 2$ boules donc $\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, P(\bar{B}_1 \cap \dots \cap \bar{B}_{i-1})(\bar{B}_i) = \frac{n - (i - 1)}{n + 2 - (i - 1)} = \frac{n + 1 - i}{n + 3 - i}$

et à l'issue du tirage des k noires il reste 2 boules blanche sur les $n + 2 - k$ restantes donc $P(\bar{B}_1 \cap \dots \cap \bar{B}_k)(B_{k+1}) = \frac{2}{n + 2 - k}$

$$\text{donc } P(X = k) = \frac{2n(n - 1) \dots (n + 2 - k)(n + 1 - k)}{(n + 2)(n + 1)n(n - 1) \dots (n + 3 - k)(n + 2 - k)} = \frac{2(n - k + 1)}{(n + 1)(n + 2)}$$

en simplifiant le produit $n(n - 1) \dots (n + 2 - k)$ qui apparaît au numérateur et au dénominateur

4. Cette formule est-elle encore valable pour $k = 0$?

0,5 point

Pour $k = 0$, $\frac{2(n-k+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{2(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{n+2}$ ce qui correspond bien à $P(X = 0)$ trouvé plus haut, donc la formule reste valable pour $k = 0$

5. a. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^n (n-k)(n-k+1)$ grâce au changement d'indice $i = n-k$

1,5 points

En faisant comme suggéré le changement d'indice $i = n-k$, on trouve $S_n = \sum_{k=0}^n (n-k)(n-k+1) = \sum_{i=0}^n i(i+1)$

(les bornes restent les mêmes car $k = 0 \Rightarrow i = n$ et $k = n \Rightarrow i = 0$)

donc $S_n = \sum_{i=0}^n (i^2 + i) = \sum_{i=0}^n i^2 + \sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ en utilisant les résultats de la somme des entiers et de la somme des carrés d'entier

donc $S_n = \frac{n(n+1)}{2} \left(1 + \frac{2n+1}{6}\right) = \frac{n(n+1)}{2} \frac{2n+1+3}{3} = \frac{n(n+1)(2n+4)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

b. En déduire l'espérance $E(n-X)$ de la variable aléatoire $n-X$

1 point

Comme $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ (il ne peut y avoir plus de n boules noires avant le tirage de la première blanche),

d'après le théorème de transfert, $E(n-X) = \sum_{k=0}^n (n-k)P(X=k)$

or $\sum_{k=0}^n (n-k)P(X=k) = \sum_{k=0}^n (n-k) \frac{2(n-k+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^n (n-k)(n-k+1) = \frac{2}{(n+1)(n+2)} S_n$

donc $E(n-X) = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \times \frac{n(n+1)(n+2)}{3} = \frac{2n}{3}$ (car $S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$)

c. En déduire que $E(X) = \frac{n}{3}$

0,5 point

Par linéarité de l'espérance, $E(n-X) = n - E(X)$ donc $E(X) = n - E(n-X) = n - \frac{2n}{3} = \frac{n}{3}$

Partie 3 - cas particulier où Aline n'obtient pas de boule noire

Comme dans la partie précédente, $n > 2$

3,5 points

On suppose ici que $X = 0$, autrement dit que Aline obtient une boule blanche au premier tirage.

On note T la variable aléatoire définie par $T = Y + 1$

1. Combien de boules au total contient l'urne au moment où Bob commence à jouer? Combien de boules blanches?

Comme Aline a pioché une boule blanche dès le premier tirage, au moment où Bob commence, il ne reste plus qu'une boule blanche et il reste toujours n boules noires, donc $n+1$ boules au total.

0,5 point

2. Justifier que T suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

1 point

Y correspond au nombre de boules noires tirées avant le « premier succès » (le tirage de la blanche), donc Y compte le nombre d'échecs avant le premier succès. De sorte que si ce succès intervient au $k^{\text{ème}}$ tirage, $Y = k-1$ et $T = k$, donc T est simplement le rang d'appariation du premier succès dans une expérience où on répète de manière identique (tirage avec remise) et indépendant une même épreuve de Bernoulli donc le paramètre de succès vaut $\frac{1}{n+1}$ (1 blanche sur les $n+1$ boules au total).

donc T suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{n+1}$

3. Donner $E(T)$ et $V(T)$

1 point

D'après le cours, $E(T) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{n+1}} = n+1$ et $V(T) = \frac{q}{p^2} = \frac{\frac{n}{n+1}}{\left(\frac{1}{n+1}\right)^2} = \frac{n}{n+1} (n+1)^2 = n(n+1)$

4. En déduire $E(Y)$ et $V(Y)$

1 point

Par linéarité de l'espérance, $Y = T - 1 \Rightarrow E(Y) = E(T) - 1 = n+1 - 1 = n$

et par propriété de la variance ($V(X+b) = V(X)$), on trouve $V(Y) = V(T) = n(n+1)$

Exercice 4

8 points

Soit M la matrice définie par $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Soit N la matrice telle que $M = I_4 + N$

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer N^n

1,5 points

Par définition, de $N = M - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
de fait $\forall n \geq 4, N^n = N^{n-3}N^3 = 0_3$ car $N^3 = 0_3$ (N^{n-3} est bien défini par $n-3 \geq 1$)

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, M^n = I_4 + nN + \frac{n(n-1)}{2}N^2$

1,5 points

Par récurrence! Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit l'assertion $P(n) : M^n = I_4 + nN + \frac{n(n-1)}{2}N^2$

Initialisation : $P(0)$ est vraie $\Leftrightarrow M^0 = I_4 + 0N + 0N^2 \Leftrightarrow M^0 = I_4$ ce qui est vrai, donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$ vraie, alors $M^n = I_4 + nN + \frac{n(n-1)}{2}N^2$ par hypothèse

or $M^{n+1} = M^n M$ et $M = I_4 + N$, donc $M^{n+1} = (I_4 + nN + \frac{n(n-1)}{2}N^2)(I_4 + N)$

donc $M^{n+1} = I_4 + nN + \frac{n(n-1)}{2}N^2 + N + nN^2 + \frac{n(n-1)}{2}N^3 = I_4 + (n+1)N + \left(\frac{n(n-1)}{2} + n\right)N^2$ car $N^3 = 0$

or $\frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n-1) + 2n}{2} = \frac{n(n-1+2)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ donc $M^{n+1} = I_4 + (n+1)N + \frac{(n+1)n}{2}N^2$
i.e. $P(n+1)$ est vraie, d'où l'hérédité et donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie.

2. On considère maintenant le graphe dont M est la matrice d'adjacence.

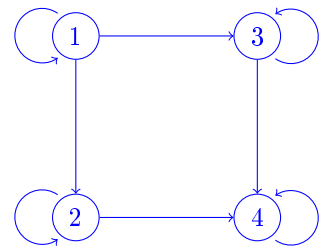
a. Représenter ce graphe.

1 point

La matrice n'est pas symétrique, il s'agit donc d'un graphe orienté.

Chaque sommet possède une boucle (de fait le graphe n'est pas simple).

On note 1, 2, 3 et 4 les sommets dans l'ordre des lignes.



b. En utilisant le critère de connexité d'un graphe à partir de sa matrice d'adjacence, déterminer si ce graphe est connexe.

1,5 points

Visuellement, on comprend que ce graphe n'est pas connexe (on ne peut aller du sommet 4 au sommet 1 par exemple. Et de manière évidente avec le critère de connexité, on trouve que le graphe n'est pas connexe puisque $\forall k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket, M^k$ (y compris $M^0 = I_4$) n'a que des coefficients nuls sous la diagonale, de fait ce sera le cas de $I_4 + M + M^2 + M^3$, pour être plus explicite, on peut utiliser la formule de la question 1.b. qui donne $M^2 = I_4 + 2N + N^2$ et $M^3 = I_4 + 3N + 3N^2$

de fait $I_4 + M + M^2 + M^3 = I_4 + I_4 + N + I_4 + 2N + N^2 + I_4 + 3N + 3N^2 = 4I_4 + 6N + 4N^2 = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 & 8 \\ 0 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

c. Ecrire un programme Python qui permet de visualiser le résultat de ce critère.

1,5 points

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al # pour les puissances
# on définit la matrice d'adjacence
M=np.array([[1 , 1 , 1 , 0 ],[0 , 1 , 0 , 1 ],[0 , 0 , 1 , 1 ],[0 , 0 , 0 , 1 ]])
```

```

# matrice de connexité
M_C=np.zeros(4) # ne contient que des zéros au début
for k in range (0,4):
    M_C=M_C+al.matrix_power(M,k) # on complète en ajoutant les puissances (entre 0 et 3) de M

```

- d. Combien existe-t-il de chaîne(s) de longueur 32 pour aller du sommet 2 au sommet 3?

1 point

On voit sur le graphe qu'il n'est pas possible d'aller du sommet 2 au sommet 3.

Mathématiquement, le coefficient 2, 3 (2^{ème} ligne et 3^{ème} colonne) de la matrice M^{32} donne ce résultat (le nombre de chaînes de longueur 32 pour aller du sommet 2 au sommet 3)

or d'après **1.b.** $M^{32} = I_4 + 32N + \frac{32 \times 31}{2}N^2$

et les coefficients 2, 3 et I_4, N et N^2 sont nuls

donc il n'y a aucune chaîne de longueur 32 pour aller du sommet 2 au sommet 3