ECG1A **DEVOIR SURVEILLÉ N° 1** samedi 07 septembre 2024

Consignes et rappels :

1. Tous les feuillets doivent être identifiables et numérotés .
2. Veillez à bien justifier vos réponses.
3. Si vous ne parvenez pas à établir un résultat ou si vous n'avez aucune idée de la manière de l'établir, n'inventez pas !
4. Vous pouvez admettre un résultat donné par l'énoncé à condition de l'indiquer clairement dans votre copie.
5. Les symboles $\Longleftrightarrow$ et $\Longrightarrow$ ne doivent pas figurer en début de ligne, ils doivent toujours avoir un membre à gauche et à droite. La flèche $\Longrightarrow$ n'a pas le sens de "donc" , il vaut mieux bannir son utilisation dans un raisonnement. Quant au symbole $\Longleftrightarrow$, on le réservera à la résolution d'(in)équations ou de systèmes d'(in)équations.
6. Il est inutile de recopier l'énoncé, écrivez sur des copies doubles, laissez une marge à gauche et traitez les questions dans l'ordre. En revanche les exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre.
7. Les résultats obtenus à chaque question devront être encadrés à la règle.
8. N'utilisez pas de crayon à papier ni de surligneur.
9. Aucune abréviation ni symbole mathématique ne doit figurer dans vos phrases qui doivent être rédigées dans un français correct !
10. Ce qui est illisible ne sera pas lu. Pas de rature, utilisez du brouillon pour vos essais et recherches préalables. Si vous vous servez d'effaceur, de correcteur, de "blanc", n'oubliez pas, après le temps de séchage réglementaire, de procéder aux rectifications projetées.
11. Les copies non soignées seront pénalisées.
12. Aucune sortie définitive ni sortie "toilette" durant la première heure ; la durée de l'épreuve est de quatre heures.
13. Aucune calculatrice ni tablette, aucun ordinateur ni matériel connecté, aucun document, n'est autorisé.

PROBLEME

La partie 1 n'est pas à traiter aujourd'hui, elle à faire en devoir maison.

Partie 1

Dans cette partie, on considère trois suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$, $(b_n)_{n\geqslant 1}$ et $(c_n)_{n\geqslant 1}$ définies par la donnée des premiers termes $a_1 = \frac{3}{8}$, $b_1 = 0$ et $c_1 = \frac{5}{8}$ et les relations de récurrence suivantes :

$$\text{pour tout entier naturel } n, \qquad \begin{cases} a_{n+1} = \frac{2}{11}a_n + \frac{3}{11}b_n + \frac{3}{11}c_n \\ b_{n+1} = \frac{4}{11}a_n + \frac{3}{11}b_n + \frac{4}{11}c_n \\ c_{n+1} = \frac{5}{11}a_n + \frac{5}{11}b_n + \frac{4}{11}c_n \end{cases}$$

1. Calculer a_2, b_2 et c_2.
2. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul, $a_n + b_n + c_n = 1$.
   On définit trois suites auxiliaires $(x_n)_{n\geqslant 1}$, $(y_n)_{n\geqslant 1}$ et $(z_n)_{n\geqslant 1}$ par les relations : pour tout entier naturel n non nul,
   $$x_n = a_n + b_n + c_n, \quad y_n = -a_n + 2b_n - c_n \quad \text{et} \quad z_n = -5a_n - 5b_n + 7c_n$$
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est constante.
4. a) Montrer que la suite $(y_n)_{n\geqslant 1}$ est géométrique de raison $-\frac{1}{11}$.
   b) Donner pour tout entier naturel n non nul, une expression de y_n en fonction de n.
5. a) Montrer que la suite $(z_n)_{n\geqslant 1}$ est géométrique.
   b) Donner pour tout entier naturel n non nul, une expression de z_n en fonction de n.
6. a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = \frac{1}{3}(x_n + y_n)$ et que $c_n = \frac{1}{12}(5x_n + z_n)$.
   b) Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, une expression de a_n en fonction de x_n, y_n et z_n.
   c) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'expression de a_n, b_n et c_n en fonction de n.
7. Déterminer les limites des suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$, $(b_n)_{n\geqslant 1}$ et $(c_n)_{n\geqslant 1}$.

Partie 2

Les valeurs des probabilités seront donnés sous forme de fraction irréductible.

Un étang contient 3 goujons, 5 truites et 4 perches. Afin de ne pas vider l'étang, un pêcheur décide d'attraper un premier poisson et de le mettre dans son seau puis, à chaque fois qu'il attrape un poisson, il relâche sa dernière prise afin de placer la nouvelle dans son seau. On suppose qu'à chaque prise, le pêcheur attrape l'un des poissons disponibles dans l'étang avec équiprobabilité.
Cependant, pour le premier poisson pêché, les perches prennent peur lorsque le pêcheur lance sa ligne dans l'eau et elles se réfugient au fond de l'étang, ce qui fait qu'il devient impossible d'en attraper une. Après le premier poisson, les perches s'habituent au pêcheur et peuvent être attrapées comme n'importe quel autre poisson.
Pour tout entier naturel n non nul, on note

- G_n l'événement « le $n^{\text{ème}}$ poisson pêché est un goujon », de probabilité g_n,
- P_n l'événement « le $n^{\text{ème}}$ poisson pêché est une perche », de probabilité p_n,
- T_n l'événement « le $n^{\text{ème}}$ poisson pêché est une truite », de probabilité t_n.

1. Justifier que $g_1 = \dfrac{3}{8}, p_1 = 0$ et $t_1 = \dfrac{5}{8}$.
2. a) Donner les probabilités conditionnelles $P_{G_1}(G_2)$ et $P_{T_1}(G_2)$.
   b) En déduire la probabilité que le deuxième poisson attrapé soit un goujon.
3. Sachant que le pêcheur vient d'attraper son deuxième poisson et qu'il s'agit d'un goujon, quelle est la probabilité que le premier poisson pêché soit une truite ?
4. Soit n un entier naturel non nul.
   a) Donner les probabilités conditionnelles $P_{G_n}\left(G_{n+1}\right), P_{P_n}\left(G_{n+1}\right)$ et $P_{T_n}\left(G_{n+1}\right)$.
   b) En remarquant que (G_n, P_n, T_n) est une partition de l'univers, donner à l'aide de la formule des probabilités totales, l'expression de g_{n+1} en fonction de g_n, t_n et p_n .
   c) De même sans les justifier, donner une expression de p_{n+1} et t_{n+1} en fonction de g_n, t_n et p_n.
5. **Ne pas traiter cette question en DS**
   A l'aide de la partie 1, en déduire l'expression de g_n, de p_n et de t_n uniquement en fonction de n.

Partie 3

Sur un grand lac, le concours récompense les pêcheurs ayant attrapé le plus de poissons en trois heures. Le lac étant tellement grand qu'on suppose que les chances d'attraper un poisson quel qu'il soit sont identiques et sont indépendantes du nombre de poissons déjà pêchés par les concurrents. Notre pêcheur est sur le lac et se concentre pour faire le plus de prises.

Dans cette partie, on découpe les trois heures en périodes de 20 minutes. Pendant chaque période qu'on supposera indépendante, le pêcheur attrape au plus un poisson et la probabilité d'attraper un poisson est de 1/4.

1. Reconnaître la loi de la variable aléatoire U donnant le nombre de poissons attrapés par le pêcheur pendant une période.
2. Reconnaître la loi de la variable aléatoire V donnant le nombre de poissons attrapés par le pêcheur pendant le concours.
3. Quelle est la probabilité que le pêcheur termine le concours bredouille, c'est-à-dire qu'il n'ait attrapé aucun poisson ?

EXERCICE 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$.
Soit $\mathcal{C}$ la représentation graphique de f dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 2 cm.
1. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
Que pouvez-vous en déduire sur la représentation graphique $\mathcal{C}$ de f ?
2. a) Montrer que pour pour tout réel x on a : $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.
b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Comment interpréter graphiquement ce résultat ?
3. a) Montrer que la dérivée de f vérifie, pour tout réel x, la relation :
$f'(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$.
b) Déterminer le sens de variation de f. Dresser son tableau de variations en y faisant figurer les limites calculées aux questions 1. et 2. ainsi que $f(0)$.
c) Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
4. Montrer que pour tout réel x on a : $f''(x) = \dfrac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$.
Étudier le signe de f'' ; en déduire la convexité de f.
5. Tracer $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$.
6. Pour tout réel x, on pose : $h(x) = \ln(1+e^x)$.
a) Calculer la dérivée de h.
b) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.
7. Résoudre l'inéquation : $f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

EXERCICE 1

On considère la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $\forall x>0, f(x)=\ln\left(x^2+1\right)-\ln(x)$

1. Étudier la limite de f en 0^+. En déduire que la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f admet une asymptote dont on donnera une équation.

2. a) Justifier que pour tout réel $x>0$,

$$f(x)=\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

b) Étudier la limite de f en $+\infty$.

3. a) Justifier que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x>0$.

b) Déterminer le signe de $f'(x)$ pour $x>0$ (on fera un tableau).

4. Dresser alors le tableau de variations de f.

5. Donner, en français, les variations de f.

6. Résoudre l'équation : $f(x)=0$.

7. Donner l'allure de la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f. On rappelle que $2<e<3$.

EXERCICE 2

On considère la suite définie par $u_0=5$ et pour tout $n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=\dfrac{1}{9}u_n\left(u_n+3\right)$.

1. Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}, 0\leqslant u_n\leqslant 6$.

2. Étudier la monotonie de $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. En déduire que la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

4. Compléter le programme Python suivant qui demande à l'utilisateur un entier naturel n puis calcule et affiche la valeur de u_n.

```
n=int(input("n= "))
u=5
for k in range (---------):
    u=----------
print(----------)
```

5. Compléter le programme Python suivant afin qu'il calcule et affiche la valeur du premier entier naturel n tel que $u_n\leqslant 10^{-3}$.

```
u=5
n=0
while ---------- :
    n= --------
    u= ---------
print(----------)
```