

Consignes et rappels :

1. Tous les feuillets doivent être identifiables et numérotés .
2. Veuillez à bien justifier vos réponses.
3. Si vous ne parvenez pas à établir un résultat ou si vous n'avez aucune idée de la manière de l'établir, n'inventez pas !
4. Vous pouvez admettre un résultat donné par l'énoncé à condition de l'indiquer clairement dans votre copie.
5. Les symboles $\Longleftrightarrow$ et $\Longrightarrow$ ne doivent pas figurer en début de ligne, ils doivent toujours avoir un membre à gauche et à droite. La flèche $\Longrightarrow$ n'a pas le sens de "donc" , il vaut mieux bannir son utilisation dans un raisonnement. Quant au symbole $\Longleftrightarrow$, on le réservera à la résolution d'(in)équations ou de systèmes d'(in)équations.
6. Il est inutile de recopier l'énoncé, écrivez sur des copies doubles, laissez une marge à gauche et traitez les questions dans l'ordre. En revanche les exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre.
7. Les résultats obtenus à chaque question devront être encadrés à la règle.
8. N'utilisez pas de crayon à papier ni de surligneur.
9. Aucune abréviation ni symbole mathématique ne doit figurer dans vos phrases qui doivent être rédigées dans un français correct !
10. Ce qui est illisible ne sera pas lu. Pas de rature, utilisez du brouillon pour vos essais et recherches préalables. Si vous vous servez d'effaceur, de correcteur, de "blanc", n'oubliez pas, après le temps de séchage réglementaire, de procéder aux rectifications projetées.
11. Les copies non soignées seront pénalisées.
12. Aucune sortie définitive ni sortie "toilette" durant la première heure ; la durée de l'épreuve est de quatre heures.
13. Aucune calculatrice ni tablette, aucun ordinateur ni matériel connecté, aucun document ne sont autorisés.

Exercice 1

Soit f la fonction définie par $f(x) = e^x - \ln(x)$.

1. a) Étudier les variations de la fonction $\Phi : x \mapsto xe^x - 1$.
Déterminer les limites de Φ aux bornes de son domaine de définition et dresser son tableau de variations complet.
b) En déduire qu'il existe un unique réel α tel que $\alpha e^\alpha = 1$.
c) Déterminer le signe de $\Phi(x)$ en fonction de x et montrer que $\alpha > 0$.
2. a) Donner l'ensemble de définition de f .
b) Étudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.
c) Établir le tableau de variations de f .
d) Montrer que f admet un minimum, égal à $\alpha + \alpha^{-1}$.
3. a) Donner une équation de la tangente (T) à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.
b) Déterminer le point d'intersection de (T) avec l'axe des ordonnées.
4. Calculer la dérivée seconde de f et l'interpréter en termes de convexité.
5. Esquisser la courbe de f le plus précisément possible, à l'aide des résultats obtenus précédemment.

Exercice 2

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Un équipementier de matériels sportifs possède plusieurs magasins à la montagne. Il propose du matériel de glisse en location. La probabilité que le matériel loué soit rendu abîmé après une journée de location est : $p_1 = 0,1$ pour une paire de skis et $p_2 = 0,2$ pour un surf.

Partie A

Pendant chaque saison hivernale un sportif, prénommé Julien, loue du matériel un jour par semaine. À chaque location, la probabilité qu'il loue des skis est égale à $0,7$ et celle qu'il loue un surf est égale à $0,3$. On considère les événements suivants : S : "Julien choisit de louer des skis"

A : "Julien rend le matériel abîmé" B : "Julien rend le matériel en bon état"

1. Construire un arbre de probabilités et y reporter les données précédentes.
2. Une semaine, Julien loue du matériel.
 - a) La probabilité que Julien rende un surf abîmé est-elle plus élevée que la probabilité qu'il rende des skis abîmés ?
 - b) Déterminer la probabilité que Julien rende le matériel en bon état (on justifiera avec une formule).
 - c) Julien rend le matériel abîmé. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse de skis ? (On donnera le résultat sous forme d'une fraction irréductible.)

Partie B

Pendant la saison hivernale 2024 – 2025, l'équipementier fait payer 5 euros la réparation du matériel loué à la journée quand il est rendu abîmé. Julien compte effectuer n journées de locations de matériel durant cette saison.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de jours de locations où il abîme le matériel.

1. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X ; on justifiera.
2. Donner en fonction de n , la probabilité p_3 que Julien n'abîme jamais le matériel au cours de la saison.
3. On note M_n le montant en euros, que Julien devra déboursier en moyenne pour les réparations pendant la saison. Exprimer M_n en fonction de n .
4. L'équipementier propose aux clients réguliers de souscrire une assurance de 10 euros qui couvre toutes les réparations pendant la saison.
 - a) Julien a-t-il intérêt à souscrire l'assurance s'il loue douze fois du matériel pendant la saison ?
 - b) À partir de combien de locations devient-il rentable pour Julien de souscrire l'assurance ?
(On donne $\frac{10}{0.65} \approx 15.38$.)

Exercice 3

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par,

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = 1 - e^{-u_n}$$

1. On définit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x - x - 1$$

- a) Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de la fonction f .
- b) Dresser le tableau de variations de la fonction f .

- c) Tracer l'allure de la courbe représentative de f .
- d) En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq x + 1$$

- e) Grâce à la question 1 b) , résoudre l'équation

$$e^x = x + 1$$

- 2. Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n > 0$$

- 3. Recopier et compléter le programme Python suivant afin qu'il calcule et affiche les cent premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

```
import numpy as np
u = 1
print(u)
for k in range(....., .....):
    u = .....
    print(u)
```

- 4. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. On pourra s'aider de la question 1. d)
- 5. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. On notera ℓ la limite finie de la suite (u_n) .
- 6. Déterminer la valeur de la limite ℓ de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 4

Maya possède 20 € dans sa tirelire au 1^{er} juin 2025.

À partir de cette date, chaque mois elle dépense un quart du contenu de sa tirelire puis y place 20 € supplémentaires.

Pour tout entier naturel n , on note u_n la somme d'argent contenue dans la tirelire de Maya à la fin du n -ième mois. On a $u_0 = 20$.

- 1. a) Justifier que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 20$.
- b) Calculer u_1 et u_2 et expliquer ce que ces nombres représentent.
- 2. On pose pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = u_n - 80$.
- a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser sa raison.
- b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'expression de v_n en fonction de n , puis celle de u_n .
- 3. Quel calcul faut-il faire pour obtenir le montant que Maya possédera dans sa tirelire au 1^{er} janvier 2026 ?
- 4. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- 5. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.