

Corrigé du DS 1

Exercice 1 $f: x \mapsto e^x - \ln(x)$

1a) Soit $\phi: x \mapsto xe^x - 1$

Par produit et somme, la fonction ϕ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \phi'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x.$$

Or $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ donc $\phi'(x)$ est du signe de $1+x$.

xc.	$-\infty$	-1	$+\infty$
$\phi'(x)$	$-$	0	$+$
ϕ	-1	$-e^{-1} - 1$	$+\infty$

$$\phi(0) = 0e^0 - 1 = -1$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{cases}$$

donc par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = +\infty$

et par somme

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = +\infty}$$

$$\phi(-1) = -e^{-1} - 1 < 0$$

Par croissance comparée $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ donc

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi = -1}$$

$$\boxed{\phi(-1) = -e^{-1} - 1 = -\frac{1}{e} - 1 < 0}$$

b) * ϕ est strictement décroissante sur $] -\infty; -1]$ or $\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi = -1$
donc $\forall x \in] -\infty; -1]$, $\phi(x) < -1 < 0$ et
l'équation $\phi(x) = 0$ n'a pas de solution sur
 $] -\infty; -1]$.

* sur $] -1; +\infty[$, la fonction ϕ est continue et strictement ~~croissante~~ croissante

De plus $\phi(-1) < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi = +\infty$ donc $0 \in] \phi(-1); +\infty[$

et par corollaire du thm des valeurs intermédiaires appliqué aux fcts strictement monotones,

l'équation $\phi(x)=0$ admet une unique solution α sur $] -1; +\infty[$.

En conclusion: sur $\mathbb{R}$, l'équation, $\phi(x)=0$ admet une unique solution α et $\alpha > -1$.

ou encore: Il existe un unique réel α , tel que $\phi(\alpha)=0$ c'est à d $\alpha e^\alpha = 1$.

c) A l'aide du tableau de variations de ϕ :

x	$-\infty$	-1	0	α	$+\infty$
ϕ					

$\swarrow$ < 0 $\searrow$ 0 $\nearrow$ $+\infty$
 $\quad \quad \quad -1 \quad \quad \quad$

De plus $\phi(0) = -1 < 0 = \phi(\alpha)$
 $\phi(0) < \phi(\alpha)$ et ϕ strict $\nearrow$ sur $] -1; +\infty[$
 alors $\boxed{0 < \alpha}$

$$\begin{aligned} \phi(x) < 0 &\Leftrightarrow x \in]-\infty; \alpha[\\ \phi(x) = 0 &\Leftrightarrow x = \alpha \\ \phi(x) > 0 &\Leftrightarrow x \in]\alpha; +\infty[\end{aligned}$$

2a) $f(x)$ est défini $\Leftrightarrow \ln(x)$ défini $\Leftrightarrow x > 0$.

$$\boxed{\mathcal{D}_f =]0; +\infty[}$$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = e^0 = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ donc $\boxed{\lim_0 f = +\infty}$

$$\forall x > 0, f(x) = x \left(\frac{e^x}{x} - \frac{\ln(x)}{x} \right)$$

Or par croissances comparées: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} - \frac{\ln(x)}{x} = +\infty$

et par produit avec $x \rightarrow x$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$$

c) Par différence, f est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$. 3

$$\forall x > 0, f'(x) = e^x - \frac{1}{x} = \frac{xe^x - 1}{x} = \frac{1}{x} \times \phi'(x)$$

donc $f'(x)$ est du signe de $\phi'(x)$ si $x > 0$

comme $x > 0$ alors :

x	0	x	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	$+\infty$	$f(x)$	$+\infty$

$$f(x) = e^x - \ln(x)$$

d) f est strictement décroissante sur $]0; x]$ et strictement croissante sur $[x; +\infty[$ donc f admet un minimum

$$\text{en } x \text{ qui vaut } f(x) = e^x - \ln(x)$$

$$\text{or } x e^x = 1 \text{ donc } x = \frac{1}{e^x} = e^{-x} \text{ et } e^x = \frac{1}{x}$$

$$\text{et ainsi } f(x) = \frac{1}{x} - \ln(e^{-x}) = \frac{1}{x} - (-x) = \frac{1}{x} + x$$

$$f \text{ admet un minimum égal à } x + x^{-1}$$

3. a) Soit (T) la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

$$(T) \text{ a pour équation: } y - f(1) = f'(1)(x - 1)$$

$$y = e + (e - 1)(x - 1)$$

$$\text{car } f(1) = e^1 - \ln(1) = e - 0$$

$$f'(1) = e^1 - \frac{1}{1} = e - 1$$

$$(T) \text{ a pour équation: } y = (e - 1)x + 1$$

b) f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$$\forall x > 0, f''(x) = \frac{e^x(1+x) \times x - (xe^x - 1) \times 1}{x^2}$$

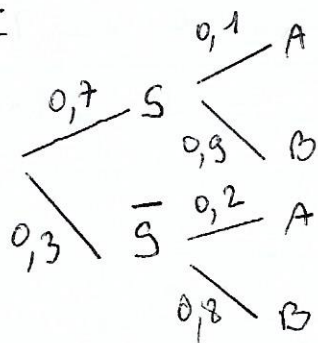
$$= \frac{x^2 e^x + 1}{x^2} > 0$$

$\forall x > 0, f''(x) > 0$ donc f est convexe sur $]0; +\infty[$.

Exercice 2

4

A] 4.



$$B = \bar{A} \quad P(S) = 0,7$$

 $\bar{S}$: "Julien loue un ski"

$$P(\bar{S}) = 1 - P(S) = 0,3$$

2.

$$P(A) = 0,2$$

$$P_1 = 0,1 = P(A)$$

$$P_2 = 0,2 = P(A)$$

$$\text{et } P(A) = 0,1$$

$$P(S \cap A) = P(S) P(A) = 0,7 \times 0,1 = 0,07$$

$$P(\bar{S} \cap A) = P(\bar{S}) P(A) = 0,3 \times 0,2 = 0,06$$

or $S \cap A$: "rendre un ski abîmé"

$\bar{S} \cap A$: "rendre un surf abîmé"

car $0,07 > 0,06$ alors

la probabilité que Julien rende un ski abîmé est plus élevée que celle de rendre un surf abîmé.

b) Comme $(S, \bar{S})$ est une partition de l'univers alors par la formule des probabilités totales:

$$P(A) = P(S \cap A) + P(\bar{S} \cap A)$$

$$= P(S) P(A) + P(\bar{S}) P(A)$$

$$= 0,7 \times 0,1 + 0,3 \times 0,2 = 0,07 + 0,06 = 0,13$$

$$P(A) = 0,13 \quad \text{donc} \quad P(\bar{A}) = 1 - 0,13 = 0,87$$

$$\text{ou } P(\bar{A}) = P(S) P(\bar{A}) + P(\bar{S}) P(\bar{A})$$

$$= 0,7 \times 0,9 + 0,3 \times 0,8 = 0,63 + 0,24 = 0,87$$

La probabilité que Julien rende le matériel en bon état est 0,87.

c) On demande $P_A(S) = \frac{P(A \cap S)}{P(A)} = \frac{P(S) P(A)}{0,13}$

$$P_A(S) = \frac{0,7 \times 0,1}{0,13} = \frac{0,07}{0,13}$$

$$P_A(S) = \frac{7}{13}$$

[5]

B) 1. X compte le nombre de réalisations de l'événement "Julien abîme le matériel un jour donné", quand on répète n fois la même expérience de manière indépendantes. Donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, P(A)=0,13)$

c'est à dire X suit la loi binomiale de paramètres n et $0,13$

$$2. P_3 = P(X=0) = \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} \times \underbrace{(0,13)^0}_{=1} \times (1-0,13)^{n-0} = (P(\bar{A}))^n$$

$$P_3 = (0,87)^n$$

$$3. M_n = E(X) \times 5 \text{ euros} \quad \text{or} \quad E(X) = n \times 0,13$$

$$\text{donc } M_n = 0,65n$$

$$4. a) \text{ Pour } n=12, \quad M_{12} = 0,65 \times 12 = 7,8 \quad \text{or} \quad 7,8 < 10$$

donc Julien n'a pas intérêt à souscrire une assurance de 10 euros, s'il loue douze fois du matériel pendant la saison.

b) Il est rentable de souscrire à l'assurance si et seulement si $10 < M_n$

$$\text{or } 10 < M_n \Leftrightarrow 10 < 0,65n \Leftrightarrow n > \frac{10}{0,65}$$

or $\frac{10}{0,65} \approx 15,38$ donc à partir de 16 jours, il devient rentable pour Julien de souscrire l'assurance.

Exercice 3

$$u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = 1 - e^{-u_n}$$

6

1. $f: x \in \mathbb{R} \mapsto e^x - x - 1$

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x - 1) = +\infty$

donc $\boxed{\lim_{-\infty} f = +\infty}$

1) $\forall x \in]0, +\infty[, f(x) = x \left(\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{x} \right)$

Or par croissance comparée: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

Par opérations: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{x} = +\infty$, par

produit $\boxed{\lim_{+\infty} f = +\infty}$

b) Par somme f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x - 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > \ln(1) (=0)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = \ln(1) = 0.$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$+\infty$	0	$+\infty$

$$f(0) = e^0 - 0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

d) f est str^t décroissante sur $]-\infty, 0]$ et str^t croissante sur $[0, +\infty[$
donc f admet pour minimum $f(0) = 0$

donc: $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$ ou encore:

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x \geq x + 1.}$$

e) Par 1b) (stricte monotonie) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ou encore $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, e^x = x + 1 \Leftrightarrow x = 0.}$

2) Soit la propriété : $P(n) : u_n > 0$

Montrons que $P(n)$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

* Si $n=1$, $u_1 = 1$ donc $u_1 > 0$.

* Supposons que pour un entier n , $n \geq 1$, $P(n)$ soit vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

Or $u_n > 0$ donc $-u_n < 0$ et $e^{-u_n} < e^0 = 1$

donc $1 - e^{-u_n} > 0$ c'est-à-dire $u_{n+1} > 0$ donc $P(n+1)$ vraie

et par principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0}$

3) import numpy as np

$u = 1$

print(u)

for k in range(2, 101): ou { in range(1, 100):

$u = 1 - \text{np.exp}(-u)$

print(u)

→ on affiche de u_1 à u_{100}

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_{n+1} - u_n = 1 - e^{-u_n} - u_n$$

$$= - (e^{-u_n} - (-u_n) - 1)$$

$$= - f(-u_n)$$

pour $x = -u_n$

~~On $(\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$ par 2)~~
 par 1 d) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$ donc $-f(u_n) \leq 0$

et $u_{n+1} - u_n \leq 0$ Ainsi $\boxed{(u_n)_{n \geq 1} \text{ est décroissante}}$

5) Comme $\forall n \geq 1$, $u_n > 0$ par 2), alors $(u_n)_{n \geq 1}$ qui est décroissante et minorée par zéro converge.

Soit $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

6) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 1 - e^{-u_n}$

donc par passage à la limite (réelle)

$$l = 1 - e^{-l}$$

$$\text{ou encore } e^{-l} - (-l) - 1 = 0 \text{ donc } f(-l) = 0$$

et par 1e) $-l = 0$ ou encore $\boxed{l = 0}$

Exercice 4

18

1a) A la fin du $(n+1)^{i\text{e}}$ mois, Naya a dépensé $\frac{1}{4} u_n$
($= \frac{1}{4}$ du contenu de la tirelire à la fin du n^{e} mois)
donc il lui reste $u_n - \frac{1}{4} u_n = \frac{3}{4} u_n$ euros auquel elle
rajoute 20 euros donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3}{4} u_n + 20}$

b) $u_0 = 20$ donc $u_1 = \frac{3}{4} u_0 + 20 = 35$

$$u_2 = \frac{3}{4} u_1 + 20 = \frac{105}{4} + \frac{80}{4} = \frac{185}{4}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u_1 = 35 \\ u_2 = \frac{185}{4} \end{array}}$$

u_1 est la somme d'argent contenue dans la tirelire
le 1^{er} juillet 2025 et u_2 le 1^{er} août 2025.

2) Soit : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - 80$.

a) soit $n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = u_{n+1} - 80 = \frac{3}{4} u_n + 20 - 80$
 $= \frac{3}{4} u_n - 60 = \frac{3}{4} (u_n - 80)$
 $= \frac{3}{4} v_n$.

Ainsi la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$.

b) On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \times v_0$

or $v_0 = u_0 - 80 = -60$ donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, v_n = -60 \left(\frac{3}{4}\right)^n}$

$v_n = u_n - 80$ donc $u_n = v_n + 80$

$$\text{et } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 80 - 60 \left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

3 Pour connaître le montant au 1^{er} janvier 2026, il faut
calculer $\boxed{u_7}$

5. $-1 < \frac{3}{4} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ et $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 80}$

Au bout d'un "grand" nombre d'années, Naya possèdera
environ 80 €.

4. Soit $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = 80 - 60 \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - (80 - 60 \left(\frac{3}{4}\right)^n)$
 $= 60 \left(\frac{3}{4}\right)^n \left(1 - \frac{3}{4}\right) > 0$ donc (u_n) croissante