

☆☆☆☆ Exercice 1 : Classique suites récurrentes avec fonction (EML 1995 voie E)

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x \ln(1+x)$. On considère également $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \geq 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étude de f .
 - (a) Justifier f est dérivable et calculer $f'(x)$ pour tout réel x positif. Calculer également $f''(x)$.
 - (b) Étudier les variations de f' et en déduire celle de f .
 - (c) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
2. Résoudre l'équation $f(x) = x$.
3. On suppose dans cette question que $u_0 \in]e-1, +\infty[$.
 - (a) Montrer que pour tout entier naturel n $e-1 < u_n \leq u_{n+1}$.
 - (b) En déduire que u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.
4. Dans cette question on suppose $u_0 \in]0, e-1[$. Étudier alors la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

☆☆☆☆ Exercice 2 : Classique 2 mais version EML 2011 ECE

On considère l'application

$$f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = (x + \ln x)e^{x-1}.$$

Partie I : Étude et représentation graphique de f

1. Montrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$. On note f' sa fonction dérivée. Pour tout $x \in]0; +\infty[$, calculer $f'(x)$.
2. Établir :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad \ln x + \frac{1}{x} > 0$$
3. En déduire :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad x + \ln x + 1 + \frac{1}{x} > 0.$$
4. En déduire le sens de variation de f .
5. Dresser le tableau de variation de f , comprenant la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$. Calculer $f(1)$ et $f'(1)$.
6. Tracer l'allure de C . On précisera la tangente au point d'abscisse 1.

Il n'est demandé ni l'étude de la convexité, ni la recherche d'éventuels points d'inflexion.

Partie II : Étude d'une suite récurrente associée à f

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 2$.
2. Établir, par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq e^n.$$

Quelle est la limite de u_n lorsque l'entier n tend vers l'infini ?
3. Écrire un programme en Python qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 10^{20}$.

★★☆☆ Exercice 3 : EML 2017 voie E : Beaucoup d'études de fonctions (parfait pour s'entraîner)

On considère la fonction $f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in]0; +\infty[$, par :

$$f(x) = e^x - e \ln(x).$$

On admet les encadrements numériques suivants :

$$2,7 < e < 2,8, \quad 7,3 < e^2 < 7,4, \quad 0,6 < \ln(2) < 0,7.$$

PARTIE I : Étude de la fonction f

1. (a) Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$ et calculer, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.
(b) Dresser le tableau de variations de f' avec la limite de f' en 0 et la limite de f' en $+\infty$, et préciser $f'(1)$.
2. Dresser le tableau de variations de f avec la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$, et préciser $f(1)$.
3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f .
4. (a) Étudier les variations de la fonction $u :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x) - x$.
(b) En déduire que l'équation $f'(x) = x$, d'inconnue $x \in]0; +\infty[$, admet une solution et une seule, notée α , et montrer :

$$1 < \alpha < 2.$$

PARTIE II : Étude d'une suite, étude d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et, pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 2$.
6. (a) Étudier les variations, puis le signe, de la fonction $g : [2; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, définie par $g(x) = f(x) - x$.
(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
7. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet $+\infty$ pour limite.
8. Écrire un programme en **Python** qui, étant donné un réel A , renvoie un entier naturel N tel que $u_N \geq A$.
9. (a) Démontrer : $\forall x \in [2; +\infty[, \quad 2 \ln(x) \leq x \leq \frac{e^x}{3}$.
(b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geq \frac{6-e}{2} u_n$.
(c) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \frac{1}{u_n} \leq \left(\frac{2}{6-e} \right)^n \frac{1}{2}$.

★★☆☆ Exercice 4 : Étude d'une suite implicite (Edhec 2008 ECE)

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n , par : $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{1}{1+e^x} + nx$.

On appelle (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 5 cm.

1. (a) Déterminer, pour tout réel x , $f'_n(x)$ et $f''_n(x)$.
(b) En déduire que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$ ainsi que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$.
(b) Montrer que les droites (D_n) et (D'_n) d'équations $y = nx$ et $y = nx + 1$ sont asymptotes de (C_n) .
(c) Déterminer les coordonnées du seul point d'inflexion, noté A_n de (C_n) .
(d) Donner l'équation de la tangente (T_1) à la courbe (C_1) en A_1 , puis tracer sur un même dessin les droites (D_1) , (D'_1) et (T_1) ainsi que l'allure de la courbe (C_1) .
3. (a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une seule solution sur $\mathbb{R}$, notée u_n .
(b) Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{-1}{n} < u_n < 0$.
(c) En déduire la limite de la suite (u_n) .
(d) En revenant à la définition de u_n , montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = -\frac{1}{2}$.