

Cahier de vacances de Mathématiques

À destination des futurs étudiants de classes préparatoires du lycée
Rabelais, filière ECG1 (mathématiques appliquées)



Chers étudiants,

Pour aborder sereinement le programme de mathématiques de classe préparatoire, une certaine aisance en calcul est nécessaire. Ce document est un support pour que vous puissiez effectuer un entraînement régulier cette année. Il est conçu pour vous faire revoir et surtout manipuler de manière répétitive des techniques de calcul vues au collège et au lycée. Nous nous appuyerons sur ces techniques dès le début de l'année. Ne soyez pas surpris de la simplicité des premiers thèmes abordés. Il faut impérativement que les outils de base soient maîtrisés et que vous puissiez faire des calculs rapidement et sans faute.

Ce document n'est pas une introduction au cours de mathématiques de classe préparatoire. Vous n'y trouverez aucun nouveau théorème et n'y découvrirez aucune nouvelle technique. Cet document n'a même pas l'ambition de vous faire réviser de manière exhaustive votre cours de terminale.

Ce document propose des rappels de cours, des exercices, mais aussi et surtout une organisation de votre travail. En effet, chaque leçon présente le travail à effectuer sur une ou deux journées au maximum. Il est impératif de suivre l'ordre des leçons et d'effectuer vos révisions de manière régulière. Il faut absolument mémoriser le cours et faire tous les exercices de chaque leçon. Prévoir approximativement trois semaines pour mener cette tâche à bien, en travaillant raisonnablement chaque jour, suivant le rythme que vous aurez décidé d'avoir. Si vous en avez le temps, en particulier lorsque la leçon étudiée est plus courte, prolonger ce travail obligatoire en faisant quelques exercices d'entraînement supplémentaires vous permettra d'être encore plus à l'aise pour votre première année post-baccalauréat. Les plus curieux pourront aussi étudier quelques exercices de recherche. Les exercices facultatifs sont regroupés dans un document annexe. Notez que le présent document contient aussi une annexe fournissant des indications pour certains exercices et une annexe présentant les solutions de tous les exercices. Étudier les corrigés des exercices obligatoires fait partie du travail sur une leçon. La calculatrice est interdite au concours : il en sera donc de même tout au long de l'année prochaine et il faut donc faire tous les exercices proposés sans calculatrice.

Voici quelques conseils pour vous aider à utiliser ce document.

- Avancez à votre rythme dans les calculs. L'objectif principal n'est pas de calculer vite mais de calculer juste. La vitesse viendra lorsque les calculs travaillés seront des réflexes. Atteindre cette dextérité n'est d'ailleurs pas un objectif.
- Traitez les leçons dans l'ordre sans négliger les premières, même si elles vous paraissent sans intérêt. En effet, pour être performant pour étudier les variations d'une fonction, il faut parfaitement maîtriser les techniques de factorisation, de résolution d'inéquations...
- Si on excepte les exercices de « calcul mental », travaillez impérativement par écrit, sans sauter d'étapes. Chaque étape d'un calcul doit être fondée sur une règle opératoire précise que l'on applique rigoureusement et que l'on doit être capable de citer.
- Lorsqu'un exercice a pour objectif de faire plusieurs calculs du même type, lisez le corrigé de chaque calcul avant d'aborder les calculs suivants. Il est en effet inutile de faire trois calculs avec trois fois la même erreur. Lire le corrigé de chaque calcul effectué vous permet d'aborder les calculs suivants avec plus d'assurance.
- Lorsque vous cherchez un exercice de révision, il n'est pas inutile de relire le cours concerné, même si vous êtes sûr de le connaître parfaitement. Par ailleurs, ceux qui font des exercices supplémentaires d'entraînement peuvent résoudre des exercices sur le thème du jour mais aussi sur les leçons passées.
- Entraînez vous régulièrement. Il est inutile de résoudre cinquante équations du second degré pendant une semaine, pour ne plus jamais en croiser une pendant des mois. En particulier, ceux qui chercheront les exercices d'entraînement facultatifs auront intérêt à faire un ou deux calculs de chaque exercice chaque jour (un développement, une factorisation, une manipulation de racine carrée...), plutôt que faire tous les calculs d'un exercice ne proposant que des développements un jour pour faire tous ceux d'un exercice suivant consacré aux racines carrées le lendemain.

Bon courage !

Table des matières

1 Fractions	5
2 Puissances	9
3 Racines carrées	11
4 Développement et factorisation	15
5 Résolution d'équations	19
6 Résolution d'inéquations	25
7 Exponentielle et logarithme	31
8 Dérivation	37
9 Variations d'une fonction	41
10 Établir une inégalité	43
11 Exercices d'entraînement supplémentaires	47
12 Corrigé des exercices	55

Leçon 1 : Fractions

1.1 Ajouter et soustraire des fractions

- Soient a , b et k trois nombres réels, avec $b, k \neq 0$. On a :

$$\frac{k \times a}{k \times b} = \frac{a}{b}.$$

Pour **simplifier une fraction**, il faut donc trouver un diviseur commun au numérateur et au dénominateur.

- Soient a , b et c trois nombres réels, avec $c \neq 0$. On a :

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \quad \text{et} \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}.$$

Pour **ajouter, ou soustraire, deux fractions**, il faut donc qu'elles soient au même dénominateur (on ajoute alors, ou on soustrait, les valeurs au numérateur).



Exercice 1. Soit a un nombre entier. Effectuer les additions suivantes et donner les résultats sous forme de fractions irréductibles (sous forme « la plus simplifiée possible »).

1. $A = \frac{4}{5} + \frac{3}{25}$;

2. $B = \frac{2}{3} + 1$;

3. $C = \frac{5}{12} + \frac{11}{24}$;

4. $D = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$;

5. $E = \left(\frac{2}{5} + 2\right) + \left(\frac{2}{15} + 3\right) + \frac{3}{10}$;

6. $F = \frac{a}{5} + \frac{3a}{5} + \frac{6a}{5}$;

7. $G = a + \frac{5a}{11} + 3a + \frac{6a}{11}$.



Exercice 2. Effectuer les additions suivantes et donner les résultats sous forme de fractions irréductibles.

1. $A = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}$;

2. $B = \frac{15}{30} - \frac{3}{12}$;

3. $C = \frac{5}{12} - \frac{7}{18}$;

4. $D = \frac{4}{25} - \frac{11}{100}$;

5. $E = 7 - \frac{13}{15}$;

6. $F = 3 - \frac{3}{4}$;

7. $G = \frac{25}{6} - 3$.



Exercice 3. Soit a et b deux nombres entiers, avec b non nul. Effectuer les opérations suivantes et donner les résultats sous forme de fractions irréductibles.

1. $A = \frac{3}{9} + \left(\frac{4}{8} + \frac{10}{12}\right)$;

2. $B = \frac{6}{15} + \left(\frac{15}{20} + \frac{15}{27}\right)$;

3. $C = 2 - \left(\frac{7}{15} - \frac{3}{30}\right)$;

4. $D = \left(\frac{7}{9} + 5 + \frac{3}{4}\right) - \left(3 + \frac{1}{4} + \frac{5}{6}\right)$;

5. $E = \frac{9a}{7} - \frac{2a}{7}$;

6. $F = \frac{11a}{5} - a$;

7. $G = \frac{2a}{3b} - \frac{a}{15b} + \frac{3a}{10b}$.


1.2 Multiplier des fractions

Soient a , b , c et d quatre nombres réels, avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$. On a :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}.$$

Pour **multiplier deux fractions**, on multiplie donc entre eux les numérateurs et les dénominateurs. On en déduit aussi une formule pour **multiplier une fraction par un nombre** :

$$a \times \frac{b}{c} = \frac{a \times b}{c}.$$

Exercice 4. Soit a et b deux nombres entiers non nuls. Calculer les produits suivants et donner les résultats sous forme de fractions irréductibles (pour la dernière on se contentera d'une écriture sous forme de fraction). 

1. $A = \frac{13}{5} \times 5;$

2. $B = \frac{2}{3} \times \frac{9}{4};$

3. $C = \frac{21}{5} \times \frac{15}{7};$

4. $D = \frac{12}{20} \times \frac{35}{9};$

5. $E = 5 \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \right);$

6. $F = 6 \cdot \left(\frac{4}{5} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right);$

7. $G = 3 \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3} \right);$

8. $H = \left(4 - \frac{3}{5} \right) \left(1 - \frac{2}{3} \right);$


9. $I = \left(1 + \frac{b}{a} \right) \left(1 - \frac{a}{b} \right).$

1.3 Diviser des fractions

Soient a , b , c et d quatre nombres relatifs non nuls. On a :

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}.$$

Ainsi **diviser par une fraction** revient à faire le produit par son inverse.

Exercice 5. Calculer les quotients suivants et donner les résultats sous forme de fractions irréductibles. 

1. $A = \frac{5 + \frac{1}{4}}{7};$

2. $B = \frac{8 + \frac{3}{4}}{5};$


3. $C = \frac{5 + \frac{6}{9}}{17};$

4. $D = \frac{7 + \frac{2}{3}}{\frac{1}{9}};$

5. $E = \frac{3 + \frac{7}{9}}{\frac{3}{8}};$

6. $F = \frac{4 + \frac{1}{4}}{\frac{3}{8}};$

7. $G = \frac{3 + \frac{4}{9}}{\frac{1}{6}}.$

Exercice 6. Soit a et b deux nombres réels telles que les quantités suivantes soient bien définies (c'est-à-dire sans division par zéro). Simplifier au maximum les expressions suivantes. 

1. $A = \frac{1}{1 + \frac{1}{a}} \cdot \frac{1}{a};$

2. $B = \frac{\frac{5}{2}}{10 + \frac{5}{2}};$

3. $C = \frac{a}{\frac{ab+3b^2}{2}} \cdot \frac{b}{2a};$

4. $D = \frac{1}{\frac{8}{75} - \frac{5}{12}}.$

1.4 Comparer des fractions

Soit a , b et c trois réels avec $c > 0$.

$$\frac{a}{c} < \frac{b}{c} \text{ si et seulement si } a < b$$

Ainsi, **comparer deux fractions** mises au même dénominateur est simple (si le dénominateur est positif, il suffit de comparer les numérateurs).

Soit a, b, c et d quatre réels avec $b > 0$ et $d > 0$. Pour comparer deux fractions, on peut aussi utiliser l'égalité des produits en croix :

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \text{ si et seulement si } ad < bc \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ si et seulement si } ad = bc.$$



Exercice 7. Comparer les fractions suivantes avec le signe « > », « < » ou « = ».

1. $\frac{3}{5} \dots \frac{5}{9}$;

2. $\frac{12}{11} \dots \frac{10}{12}$;

3. $\frac{125}{25} \dots \frac{105}{21}$.



Exercice 8. Les nombres $A = \frac{33\,215}{66\,317}$ et $B = \frac{104\,348}{208\,341}$ sont-ils égaux ?



Exercice 9. On pose $A = \frac{100\,001}{1\,000\,001}$ et $B = \frac{1\,000\,001}{10\,000\,001}$. A-t-on $A > B$, $A = B$ ou $A < B$?

Leçon 2 : Puissances

2.1 Manipulation des puissances

On peut manipuler les puissances dans les produits et les quotients : pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, pour tout $(n, p) \in \mathbf{N}^2$, on a :

1. $(x \times y)^n = x^n \times y^n$;
2. $x^n \times x^p = x^{n+p}$;
3. $(x^n)^p = x^{n \times p}$;
4. $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$ si $y \neq 0$;
5. $\frac{x^n}{x^p} = x^{n-p}$ si $x \neq 0$;
6. $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ si $x \neq 0$.

Attention, les puissances ne sont en général pas compatibles avec la somme ! Par exemple, $4^2 + 5^2 \neq 9^2$. Plus généralement, si n est un entier supérieur à 2, $4^n + 5^n \neq 9^n$.

Il faut faire attention aux signes et aux parenthèses ! Par exemple, $(-2)^4 = 16$, mais $-2^4 = -16$. Plus généralement, si a est un réel et n un entier pair, $(-a)^n \neq -a^n$.



Exercice 10. Calculer les quatre premières puissances entières positives des nombres suivants :

1. $A = 1$;
2. $B = -1$;
3. $C = 2$;
4. $D = -2$;
5. $E = 3$;
6. $F = -3$.



Exercice 11. Soit a un nombre réel quelconque. Simplifier au maximum les expressions proposées.


1. $(-2)^3 2^2$;
2. $(-5)^2(-5)$;
3. $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 \left(-\frac{2}{3}\right)^3$;
4. $\frac{3}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^2$;
5. $\frac{3^2}{5^2} \left(-\frac{2}{9}\right)^2$;
6. $\left(-\frac{2}{3}\right)^4 \left(-\frac{5}{2}\right)$;
7. $a^2 \cdot a^4$;
8. $a^4 \cdot a^3$;
9. $a^5 \cdot a$;
10. $-a^3(-a)^5$;
11. $(2^2)^3$;
12. $((-3)^2)^3$;
13. $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^3$;
14. $\left(\left(-\frac{2}{5}\right)^3\right)^2$;
15. $\left(\left(-\frac{3}{2}\right)^2\right)^3$;
16. $\left(-\left(\frac{5}{2}\right)^2\right)^3$;
17. $\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^3\right)^3$;
18. $[(-3)^3 \cdot 5^2]^2$;
19. $\left[3^3 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^2\right]^2$;
20. $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(-\frac{3}{4}\right)^2\right]^2$;
21. $\left[(-2) \cdot 10^3 \left(-\frac{1}{5}\right)^4\right]^2$;
22. $\left[-27 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]^2$



Exercice 12. Soit a un nombre réel quelconque. Simplifier les expressions suivantes sous la forme $\pm a^n$ ou $\pm \frac{1}{a^n}$, où n est un entier naturel.

1. $\frac{(-a)^5}{a^3}$;
2. $\frac{(-a)^6}{(-a)^3}$;
3. $\frac{(-a)^9}{(-a)}$;
4. $\frac{(-a)^{2022}}{a}$;

5. $a^3 \cdot a^{-5}$; 6. $a^{-2} \cdot a^{-3}$; 7. $a^{-2} \cdot a^4$; 8. $a^2 \cdot a^{-1}$;
 9. $\frac{a^3}{a^{-5}}$; 10. $\frac{a^{-4}}{a^{-2}}$; 11. $\frac{a^4}{a^{-3}}$; 12. $\frac{a^{-3}}{a^{-4}}$.


Exercice 13. Écrire les nombres suivants sous forme de fractions irréductibles ou d'entiers. 

1. $\frac{1}{(-2)^{-1}}$; 2. $-\frac{1}{5^{-1}}$; 3. $-\frac{1}{6^{-3}}$;
 4. $\frac{1}{6^3}$; 5. $(-1)^3 \cdot 2^{-2} \cdot 3^3$; 6. $(-3)^{-1} \cdot 6^2 \cdot 4^{-2}$;
 7. $10^{-5} \cdot 10^3$; 8. $\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} (-1)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^3$; 9. $\left(-\frac{5}{2}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \left(-\frac{1}{5}\right)^{-1}$;
 10. $\left(\frac{4}{7}\right)^3 \left(-\frac{2}{3}\right)^3 \left(-\frac{3}{7}\right)^{-3}$; 11. $\frac{25^3 \cdot 2^7 \cdot 3^5}{30^6}$; 12. $\frac{9^{-2} \cdot 4^2}{3^{-3} \cdot 6^{-2}}$;
 13. $\frac{49^{-2} \cdot 5^6 \cdot 2^3}{7^{-3} \cdot 125^3 \cdot 12}$; 14. $\frac{4^2 \cdot (-12)^2}{(-2)^3 \cdot 6^{-2} \cdot 3^3}$; 15. $\frac{10^{-5} \cdot 25^3}{(-1)^{2022} \cdot 2^{-4}}$.

Exercice 14. Soit n un entier naturel. Écrire les nombres suivants sous forme de fractions irréductibles ou d'entiers. 

1. $\frac{4^3}{2^8}$; 2. $\frac{25^3}{(-5)^6}$; 3. $\frac{9^{-1}}{3^{-2}}$; 4. $\frac{4^{65}}{2^{128}}$;
 5. $\frac{8^{-5}}{64^{-3}}$; 6. $\frac{12^{-4} \cdot 027}{144^{-2} \cdot 014}$; 7. $\frac{2^{2n}}{4^n}$; 8. $\frac{3^{3n}}{27^{3n+1}}$;
 9. $\frac{125^{n+1}}{5^{3n-1}}$; 10. $\frac{144^{n-1}}{(12)^{2(n+1)}}$.

2.2 Révision des leçons précédentes

Exercice 15. Soient a et b deux nombres réels, avec b non nul. Simplifier le plus possible les expressions suivantes. 

1. $A = \frac{2}{15} + \frac{3}{10}$; 2. $B = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$;
 3. $C = \frac{3}{4} + \frac{2}{3}$; 4. $D = \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42}$;
 5. $E = \left(\frac{4}{9} + 2\right) + \frac{2}{3} + \left(2 + \frac{1}{12}\right)$; 6. $F = 3a + \frac{4a}{7} + \frac{a}{14}$;
 7. $G = \frac{3a}{2b} + \frac{a}{3b} + \frac{5a}{2b} + \frac{2a}{3b}$.

Exercice 16. Effectuer les additions suivantes et donner les résultats sous forme de fractions irréductibles. 

1. $A = \frac{3}{4} - \frac{2}{5}$; 2. $B = \frac{18}{12} - \frac{15}{10}$; 3. $C = \frac{17}{60} - \frac{17}{75}$;
 4. $D = 2 - \frac{11}{8}$; 5. $E = \frac{52}{15} - 3$; 6. $F = 5 - \frac{17}{5}$;
 7. $G = \frac{13}{4} - 2$.

Leçon 3 : Racines carrées

3.1 Calculs avec la racine carrée

Pour simplifier une racine carrée, on peut utiliser le résultat suivant, valable pour un réel a :

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$$

De plus, on dispose des formules suivantes, valables pour tous réels positifs x et y :

$$1. \sqrt{x \times y} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}; \quad 2. \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \text{ si } y > 0.$$

Attention, il n'y a pas de formule pour simplifier $\sqrt{x+y}$. Par exemple, $5 = \sqrt{3^2 + 4^2} \neq \sqrt{3^2} + \sqrt{4^2} = 3 + 4$.

Pour simplifier une racine carrée de la forme \sqrt{n} (où n est un entier naturel), l'idée est de décrire n sous la forme a^2b (où a et b sont des entiers naturels), de sorte que $\sqrt{n} = \sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$. Par exemple, pour simplifier $\sqrt{8}$, on écrit $8 = 2^2 \times 2$, de sorte que $\sqrt{8} = \sqrt{2^2 \times 2} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

Ces formules ressemblent à celles rappelées dans la leçon sur les puissances. C'est naturel puisque, pour tout $x \geq 0$, $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ (on étudiera cela plus en détail cette année).



Exercice 17. Simplifier au maximum les nombres suivants.

$$\begin{array}{llll} 1. \sqrt{1000}; & 2. \sqrt{125}; & 3. \sqrt{27}; & 4. \sqrt{30^{50}}; \\ 5. \sqrt{5} \times \sqrt{45}; & 6. (\sqrt{8})^5; & 7. \sqrt{27^3}; & 8. \sqrt{8} \times \sqrt{162}. \\ 9. \sqrt{(-1)^4}; & 10. \sqrt{(-2)^3 \cdot (-18)}; & 11. \sqrt{\frac{9}{25}}; & 12. \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot \frac{27}{50}}. \end{array}$$

3.2 Déterminer le signe d'une expression avec une racine carrée

Soit x , y et z trois réels positifs (on rappelle qu'on ne peut considérer que la racine carrée d'un nombre positif; la racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas).

1. On a $\sqrt{x} \geq 0$.
2. Si $x \leq y$, alors $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}$ (cela provient de la croissance de la fonction racine carrée).
3. On peut généraliser : si $x \leq y \leq z$, alors $\sqrt{x} \leq \sqrt{y} \leq \sqrt{z}$.

Le troisième point peut être utile pour obtenir une approximation d'une racine carrée. Par exemple, $4 \leq 7 \leq 9$, donc $\sqrt{2^2} \leq \sqrt{7} \leq \sqrt{3^2}$, ce qui signifie que $2 \leq \sqrt{7} \leq 3$.



Exercice 18. Déterminer le signe des réels suivants.

$$\begin{array}{llll} 1. \sqrt{7}; & 2. \sqrt{\sqrt{5}}; & 3. \sqrt{2} - \sqrt{3}; & 4. \sqrt{2\,022} - \sqrt{2\,021}; \\ 5. \sqrt{7} + \sqrt{2}; & 6. \sqrt{11} - 2; & 7. \sqrt{5} - 2; & 8. 2 + \sqrt{5}. \end{array}$$



Exercice 19. Exprimer sans racine carrée les nombres suivants.

1. $\sqrt{(-5)^2}$;
2. $\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}$;
3. $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$;
4. $\sqrt{(2-\sqrt{7})^2}$;
5. $\sqrt{(3-\pi)^2}$;
6. $\sqrt{(3-a)^2}$.

3.3 Utilisation de la quantité conjuguée

On rappelle que si a et b sont des nombres positifs, la **quantité conjuguée** de $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ est $\sqrt{a} - \sqrt{b}$. De plus, la quantité conjuguée de $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ est $\sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Pour simplifier une fraction avec des racines carrées (et rendre rationnel son dénominateur), on multiplie par l'expression conjuguée du dénominateur. Par exemple,

$$\frac{\sqrt{(-1)^2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{1 \times (1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = \frac{1-\sqrt{2}}{1^2-\sqrt{2}^2} = \frac{1-\sqrt{2}}{-1} = \sqrt{2}-1.$$

Exercice 20. Rendre rationnels les dénominateurs des expressions suivantes.



1. $\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}$;
2. $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$;
3. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$;
4. $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$;
5. $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$;
6. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$;
7. $\frac{5+2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{5-2\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$;
8. $\left(\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\right)^2$.

3.4 Montrer une égalité avec des racines carrées

Pour montrer que deux quantités a et b sont égales, on peut vérifier que $a^2 = b^2$ et que a et b sont de même signe.

Exercice 21. Démontrer les égalités suivantes.



1. $2-\sqrt{3} = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$;
2. $\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}$;
3. $\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$.

3.5 Révision des leçons précédentes

Exercice 22. Soit a et b deux nombres réels, avec b non nul. Calculer les produits suivants et donner les résultats sous forme de fractions irréductibles.



1. $A = \frac{3}{1000} \times 100$;
2. $B = \frac{3\pi}{4} \times \frac{6}{\pi}$;
3. $C = \frac{121}{22} \times \frac{4}{55}$;
4. $D = \frac{144}{125} \times \frac{75}{16}$;
5. $E = 3 \cdot \left(\frac{6}{9} + \frac{1}{5} + \frac{2}{7}\right)$;
6. $F = 7 \cdot \left(\frac{4}{14} + \frac{1}{3} + \frac{7}{9}\right)$;
7. $G = \left(5 + \frac{3}{8}\right) \left(1 + \frac{5}{8}\right)$;
8. $H = \left(\frac{7}{15} - \frac{4}{30}\right) \cdot \left(6 + \frac{3}{4}\right)$.



Exercice 23. Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme d'une puissance de 10.

1. $10^5 \cdot 10^3$;

2. $(10^5)^3$;

3. $\frac{10^5}{10^3}$;

4. $\frac{10^{-5}}{10^{-3}}$;

5. $\frac{(10^5 \cdot 10^{-3})^5}{(10^{-5} \cdot 10^3)^{-3}}$;

6. $\frac{(10^3)^{-5} \cdot 10^5}{10^3 \cdot 10^{-5}}$.

Leçon 4 : Développement et factorisation

4.1 Développement et réduction d'expressions littérales

Développer et réduire une expression consiste à écrire cette expression sous la forme d'une somme de termes. Si l'expression contient uniquement une variable x , on impose de plus que chaque puissance de x apparaisse dans au plus un terme de la somme.

Pour développer une expression, on peut utiliser les formules de distributivités suivantes, valable pour a, b, c et d des réels quelconques.

$$a \times (c + d) = ac + ad.$$

$$(a + b) \times (c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

On dispose également de trois « identités remarquables », à connaître par cœur !

Illustration de la première identité.

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
3. $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

a	a^2	ab
b	ba	b^2
	a	b



Exercice 24. Soit x, a, b et c quatre réels. Développer et réduire les expressions suivantes.

1. $A = (x^2 - x)(x + 1)$;
2. $B = (2x^2 + x - 4)(x + 2)$;
3. $C = (2x^2 + 3 - 4x)(2x + 4)$;
4. $D = \left(4x^3 + 5x^2 - \frac{3}{2}x\right) \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)$;
5. $E = (x + 1)(x - 2)(x - 3)$;
6. $F = (3x - 2)(2x + 3)(5 - x)$;
7. $G = (x - a)(x + b)(x - c)$;
8. $H = b(x + a - b) - a(x + b - a) - a^2 - b^2$;
9. $I = (x - 1)(x - a + b) - (1 - x)(x + a - b) - 2(x + a - b)(x - a + b)$;
10. $J = \left(\frac{x}{2} - \frac{a}{4}\right)(4x + 16a)$.



Exercice 25. Soit x un réel. Développer les expressions suivantes.

1. $A = (6 - 3x)^2$;
2. $B = (1 + 8x)^2$;
3. $C = (4x + 5)(5 - 4x)$;
4. $D = (7 - 4x)^2$;
5. $E = (-2x - 9)^2$;
6. $F = (6 - 2x)(6 + 2x)$;
7. $G = \left(3x - \frac{4}{3}\right)^2$;
8. $H = \left(2x - \frac{5}{2}\right)^2$;
9. $I = (7x - 3)(7x + 3) - (8x + 5)(8x - 5)$;
10. $J = (5x - 3)^2 - (3x - 7)^2$.

Exercice 26. Soit x et y deux réels. Développer et réduire les expressions suivantes.



1. $A = (x + 1)(2x - 3)(x + 2)$;
2. $B = (1 - 2x)^3$;
3. $C = (x + y + 1)^2$;
4. $D = (x - y)(x + 3y) - (x + y)(x - 4y) + 2(x - 2y)^2$.

4.2 Factorisation

Factoriser une expression consiste à transformer une somme en un produit.

Pour factoriser une expression, on peut chercher d'abord à utiliser la première formule de distributivité présentée dans le paragraphe précédent (on rappelle que a , c et d sont des réels quelconques).

$$\boxed{a} \cdot \underline{c} + \boxed{a} \cdot \underline{d} = \boxed{a} \cdot (\underline{c} + \underline{d}).$$

Par exemple, si x et y sont des réels, on a

$$4x^2y^3 - 3xy^2 = \boxed{xy^2} \cdot \underline{4xy} - \boxed{xy^2} \cdot \underline{3} = \boxed{xy^2} \cdot (\underline{4xy} - \underline{3}).$$

Exercice 27. Soit x , y , a , b , c et d des réels. Factoriser les expressions suivantes.



1. $A = 8a^2 - 24a + 32a^3$;
2. $B = 3a^2x - 6ax^2 + 12abx$;
3. $C = 5a^4b^3 + 2a^2x^3 - 3a^2b^5$;
4. $D = a^6x^4 - 6a^5x^6 + 9a^4x$;
5. $E = 8x^2y^3 - 3xy^4 + 24x^2y^5$;
6. $F = 15a^2b^2 - 30a^2b^3 + 105a^2b^4 - 75a^2b^5$;
7. $G = 6a^4b^3c^2d - 2a^3b^4cd + 8a^5b^2d^3$.

Exercice 28. Soit x un réel. Factoriser les expressions suivantes.



1. $A = (2x - 3)(5x - 1) - (2x - 3)(x + 1)$;
2. $B = (7x - 1)^2 - (7x - 1)(3x + 2)$;
3. $C = (4 - 3x)(2 + 3x) - 2(1 - 2x)(3x - 4)$;
4. $D = (3x + 1)(2x - 3) + (3x + 1)(x + 2) - (5x + 4)(3x + 1)$;
5. $E = (x - 8)(4x - 1) + x^2 - 8x$;
6. $F = x^2 - x + (x + 1)(1 - x)$.

Pour factoriser une expression, on peut aussi utiliser les deux premières identités remarquables (on rappelle que a et b sont des réels).

$$\begin{array}{c} \text{On développe} \\ \curvearrowright \\ (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ \curvearrowleft \\ \text{On factorise} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{On développe} \\ \curvearrowright \\ (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\ \curvearrowleft \\ \text{On factorise} \end{array}$$



Exercice 29. Soit a , b , x et y quatre réels. Factoriser les expressions suivantes.

- | | |
|-------------------------------------|---------------------------------------|
| 1. $A = a^4 + 4a^2b + 4b^2$; | 2. $B = 4a^2 - 12ab + 9b^2$; |
| 3. $C = x^2 - x + \frac{1}{4}$; | 4. $D = 9a^2 + \frac{b^2}{4} + 3ab$; |
| 5. $E = 9x^2 - 6x + 1$; | 6. $F = 4x^2 + 4x + 1$; |
| 7. $G = 4x^2 + 12xy + 9y^2$; | 8. $H = 2x^2 - 12x + 18$; |
| 9. $I = 9b^2 + 6ab + a^2$; | 10. $J = 64a^6 - 16a^3b + b^2$; |
| 11. $K = x^2 - 2x(x+1) + (x+1)^2$; | 12. $L = (1-x)^2 + 6x + 3$. |

On peut enfin utiliser la troisième identité remarquable :

$$\begin{array}{c}
 \text{On développe} \\
 \curvearrowright \\
 (a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \\
 \curvearrowleft \\
 \text{On factorise}
 \end{array}$$



Exercice 30. Soit a , x et y trois nombres réels non nuls. Factoriser les expressions suivantes.

- | | |
|--|--|
| 1. $A = a^2 - 25$; | 2. $B = 4x^2 - 1$; |
| 3. $C = 9x^2 - 4y^2$; | 4. $D = 25a^2 - 16b^2$; |
| 5. $E = 5x^3 - 80x$; | 6. $F = 4x^2 - a^2y^2$; |
| 7. $G = 49x^2 - 25$; | 8. $H = (a+1)^2 - a^2$; |
| 9. $I = 9x^2 - (x+2)^2$; | 10. $J = \frac{a^2}{9} - \frac{x^2}{25}$; |
| 11. $K = \frac{a^2}{x^2} - \frac{9b^2}{y^2}$; | 12. $L = (3x-4y)^2 - \frac{25}{4}$; |
| 13. $M = \frac{(x+1)^2}{9} - \frac{x^2}{16}$; | 14. $N = (x+3)^2 - (x+1)^2$; |
| 15. $O = (a+b)^2 - (a-b)^2$; | 16. $P = (2x+1)^2 - (3x-4)^2$; |
| 17. $Q = (2x+3)^2 - (1-4x)^2$; | 18. $R = (3x-4)^2 - 4(x+2)^2$; |
| 19. $S = 4(2x+3)^2 - (3x-2)^2$; | 20. $T = 25(3x-1)^2 - 16(5x+3)^2$; |
| 21. $U = (x^2-16)^2 - (x+4)^2$. | |

4.3 Révision des leçons précédentes



Exercice 31. Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme a^n , avec a et n deux entiers relatifs.

- | | | |
|-------------------------------|------------------------|---|
| 1. $3^4 \cdot 5^4$; | 2. $(5^3)^{-2}$; | 3. $\frac{2^5}{2^{-2}}$; |
| 4. $(-7)^3 \cdot (-7)^{-5}$; | 5. $\frac{6^5}{2^5}$; | 6. $\frac{(30^4)^7}{2^{28} \cdot 5^{28}}$. |

Leçon 5 : Résolution d'équations

5.1 Résoudre une équation du premier degré

Pour résoudre une équation du premier degré (c'est-à-dire une équation qui peut se ramener à la forme $ax + b = 0$, où a, b sont des réels fixés et x est l'inconnue réelle de l'équation), on rappelle que la méthode consiste à « mettre les termes avec x du même côté du signe = » puis « mettre les termes constants (sans x) de l'autre côté » puis à « isoler x ». Par exemple, si on veut résoudre l'équation $x + 3 = 7 - x$, on peut procéder comme suit :

$$\begin{array}{lcl} & \boxed{x+3} & = \quad \boxed{7-x} \\ \text{on ajoute } x & \curvearrowright & \text{on ajoute } x \\ & \boxed{2x+3} & = \quad \boxed{7} \\ \text{on soustrait } 3 & \curvearrowright & \text{on soustrait } 3 \\ & \boxed{2x} & = \quad \boxed{4} \\ \text{on divise par } 2 & \curvearrowright & \text{on divise par } 2 \\ & \boxed{x} & = \quad \boxed{2} \end{array}$$

Pour rédiger correctement ce calcul, il faut penser à deux choses. La première est d'introduire l'inconnue avec « soit $x \in \mathbf{R}$ » (ici x peut prendre n'importe quelle valeur réelle). La seconde est qu'il ne faut pas oublier de donner l'ensemble des solutions. Pour une équation du premier degré, il n'y a que trois possibilités :

1. l'équation a une unique solution x_0 , dans ce cas l'ensemble des solutions est $\{x_0\}$ (il faut utiliser des accolades et rien d'autre!);
2. l'équation n'admet pas de solution, dans ce cas l'ensemble des solutions est \emptyset (l'ensemble vide);
3. l'équation admet n'importe quel réel pour solution, dans ce cas l'ensemble des solutions est \mathbf{R} .

Dans le cas de l'exemple précédent, on rédigera donc la résolution comme suit.

Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} x + 3 &= 7 - x \\ 2x + 3 &= 7 \\ 2x &= 4 \\ x &= 2. \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation est $\{2\}$.



Exercice 32. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue x réelle.

- | | | |
|-------------------------------|--|---|
| 1. $x + 3 = 2$; | 2. $-5 + x = 4$; | 3. $3x = 2$; |
| 4. $-5x = 4$; | 5. $-4x = -10$; | 6. $3 - x = -8$; |
| 7. $2x + 4 = 5x - 7$; | 8. $\frac{2}{3}x - 5 = \frac{1}{2}x - 3$; | 9. $x + 4 = x - 7$; |
| 10. $2x + 5 = 2(x + 2) + 1$; | 11. $(x + 1)^2 = (x + 2)^2$; | 12. $2x + 3 = 4x + 6$; |
| 13. $2x + 3 = 4x + 7$; | 14. $13 + \frac{3}{2}x = 1$; | 15. $4x + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}x + 2$; |

16. $\frac{3}{2}x + \frac{1}{4} = \frac{7}{4};$

17. $\frac{x-3}{5} = \frac{3}{8};$

18. $\frac{2x-3}{7} = \frac{x-1}{3}.$

5.2 Résoudre une équation par factorisation

Pour résoudre une équation par factorisation :

- on se ramène à une équation du type $A(x) = 0$ d'inconnue x ,
- on factorise alors au maximum $A(x)$ (si jamais aucun facteur n'est visible, il est parfois intéressant de développer pour voir si, en réduisant, des termes se simplifient), en pensant, notamment, aux identités remarquables,
- on peut alors utiliser qu'un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.

Exemple : Résoudre l'équation $(x-1)(3x+2) = (x-1)(5x-4)$.

Cette équation est équivalente à $(x-1)(3x+2) - (x-1)(5x-4) = 0$.

On peut alors factoriser par $(x-1)$:

$$\begin{aligned}(x-1)(3x+2) - (x-1)(5x-4) &= 0 \\ (x-1)[(3x+2) - (5x-4)] &= 0 \\ (x-1)(3x+2-5x+4) &= 0 \\ (x-1)(-2x+6) &= 0\end{aligned}$$

Or, pour que ce produit de facteurs soit nul, il faut et il suffit que le premier facteur ou le second soit nul :

$$\begin{aligned}x-1 &= 0 \text{ ou } -2x+6 = 0 \\ x &= 1 \text{ ou } x = 3\end{aligned}$$

Il y a exactement deux solutions : 1 et 3.



Remarquons que la stratégie consistant à simplifier par $(x-1)$ au début de la résolution amène à oublier une solution :

$$\begin{aligned}(x-1)(3x+2) &= (x-1)(5x-4) = 0 \\ 3x+2 &= 5x-4 \\ 6 &= 2x \\ x &= 3\end{aligned}$$

En effet, simplifier par $(x-1)$ signifie diviser de part et d'autre par $x-1$, ce dernier devant être non-nul. Dans l'étape de simplification, on suppose donc que $x \neq 1$, ce qui nous a fait perdre cette solution. Cette technique est donc à proscrire.

Exemple : Résoudre l'équation $(x^3 - x)(x-2) = (x-1)(8x^2 - 4x)$.

On applique la méthode précédente :

$$\begin{aligned}(x^3 - x)(x-2) &= (x-1)(8x^2 - 4x) \\ x(x^2 - 1)(x-2) - (x-1)(8x^2 - 4x) &= 0 \\ x(x^2 - 1)(x-2) - (x-1)4x(x-2) &= 0 \\ x(x-1)(x+1)(x-2) - 4x(x-1)(x-2) &= 0 \\ x(x-1)(x-2)(x+1-4) &= 0 \\ x(x-1)(x-2)(x-3) &= 0\end{aligned}$$

Les solutions sont donc $x = 0, x = 1, x = 2, x = 3$.

Exemple : Résoudre l'équation $x^2 = 16$.

Appliquons notre méthode, en utilisant l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$:

$$\begin{aligned}x^2 &= 16 \\x^2 - 4^2 &= 0 \\(x - 4)(x + 4) &= 0 \\x &= 4 \text{ ou } x = -4\end{aligned}$$

Il y a exactement deux solutions : 4 et -4 .



Dire que la seule solution est 4 est erroné !!! De manière générale, l'équation $x^2 = a$ avec $a > 0$ admet deux solutions : \sqrt{a} et $-\sqrt{a}$



Exercice 33. Résoudre les équations suivantes.

1. $x^2(x + 1) = 4(x + 1)$
2. $(3x + 2)^2 = (x + 1)^2$
3. $(x - 5)(x - 7) = (x - 5)^2$
4. $(2x - 3)(5x + 1)(5 - 2x) = 0$
5. $2(x + 2)(x - 4) = x^2 - 4$
6. $(3x - 1)(5x - 4) = 25x^2 - 16$
7. $3x(1 - 3x) = 0$
8. $\left(\frac{2x - 5}{3}\right)^2 \left(\frac{4x}{5} - \frac{3}{7}\right) = 0$
9. $4x^4 - 1 = 2x^2 + 1$
10. $9x^2 + 1 = 6x$



Exercice 34. Résoudre les équations suivantes :

1. $(x - 1)(x - 2) + (x - 1)(x - 3) = 2(x - 2)(x - 3)$
2. $(x - a)(x - 2a)(x + a) = x^3 + 2a^3$
3. $\left(\frac{1}{2} - x\right)(5x + 3) + 3x(2x - 1) = 0$
4. $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$
5. $\sqrt{2}x^4 - 4x^2 = -2\sqrt{2}$

5.3 Équations polynomiales de degré 2

On appelle équation polynomiale de degré 2 une équation d'inconnue réelle x du type :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

où a, b, c sont des réels, nommés coefficients, avec $a \neq 0$.

Pour résoudre une équation polynomiale de degré 2 :

1. on identifie les réels a, b, c ,
2. on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$,
3. il y a trois cas possibles :

(a) si $\Delta > 0$ alors il y a deux solutions $x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$,

(b) si $\Delta = 0$ alors il y a une seule solution $x = \frac{-b}{2a}$,


(c) si $\Delta < 0$ alors il n'y a aucune solution réelle.



Exercice 35. Résoudre les équations suivantes :

1. $3x^2 - 5x + 1 = 0$
2. $-4x + 2x^2 - 3 = 0$
3. $x^2 + x = -1$
4. $5x^2 - 4x + 1 = 0$

5. $x^2 - 6x + 9 = 0$
7. $-2x^2 - 3x + 6 = 0$
9. $\frac{3}{4}x^2 + \sqrt{7}x - 3 = 0$
6. $\frac{x^2}{4} + x + 1 = 0$
8. $\sqrt{2}x^2 - 3x + \sqrt{2} = 0$
10. $7x^2 + 6x = 1$

Exercice 36. m désigne un nombre réel. Soit (E_m) l'équation $(m-1)x^2 + 2mx + m + 2 = 0$ d'inconnue réelle x . 

- Résoudre les équations (E_0) (c'est à dire l'équation précédente pour $m = 0$) et l'équation (E_1) (c'est à dire l'équation (E_m) pour $m = 1$)
- Pour quelle valeur de m l'équation (E_m) admet-elle $x = 0$ comme solution ? Donner l'éventuelle autre solution.
- Pour quelle(s) valeur(s) de m , l'équation (E_m) admet-elle :
 - une unique solution ?
 - deux solutions distinctes ?
 - aucune solution réelle ?

5.4 Résoudre une équation avec un quotient

Une équation avec un quotient est une équation d'inconnue réelle x du type :

$$\frac{A(x)}{B(x)} = 0$$

où $A(x), B(x)$ sont des expressions en fonction de x .

Pour résoudre une équation avec un quotient :

- on détermine tous les réels qui annulent $B(x)$,
- on résout $A(x) = 0$.
- Les solutions sont les réels trouvés à l'étape précédente parmi lesquels on a ôté, éventuellement, les réels annulant $B(x)$, obtenus à la première étape.

Exemple : Résoudre $\frac{2x^2 + x - 3}{x^2 - 1} = 0$.

- les réels qui annulent $x^2 - 1$ vérifient $x^2 - 1 = 0$ c'est à dire $(x-1)(x+1) = 0$: on trouve donc 1 et -1 ,
- on résout $A(x) = 0$ c'est à dire $2x^2 + x - 3 = 0$. C'est une équation polynomiale du second degré avec $\Delta = 25$: on trouve deux réels : 1 et $\frac{-3}{2}$.
- Comme 1 annule le dénominateur mais que le réel $\frac{-3}{2}$ ne l'annule pas, l'unique solution est $\frac{-3}{2}$.

Exemple : Résoudre $\frac{2x-3}{x-1} = 0$.

- le seul réel qui annule $x-1$ est 1,
- on résout $A(x) = 0$ c'est à dire $2x-3 = 0$. On obtient un unique réel : $\frac{3}{2}$.
- Comme $\frac{3}{2}$ n'annule pas le dénominateur, l'unique solution est $\frac{3}{2}$.

Exemple : Résoudre $\frac{2x-3}{x-1} = \frac{x-1}{x+2}$.

On se ramène à une équation quotient du type $\frac{A(x)}{B(x)} = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{2x-3}{x-1} &= \frac{x-1}{x+2} \\ \frac{2x-3}{x-1} - \frac{x-1}{x+2} &= 0 \\ \frac{(2x-3)(x+2) - (x-1)^2}{(x-1)(x+2)} &= 0 \end{aligned}$$

1. les réels qui annulent $(x-1)(x+2)$ sont 1 et -2 .
2. on résout $A(x) = 0$ c'est à dire $(2x-3)(x+2) - (x-1)^2 = 0$. Il n'y pas de facteur commun, on développe!

$$\begin{aligned} (2x-3)(x+2) - (x-1)^2 &= 0 \\ 2x^2 + 4x - 3x - 6 - (x^2 - 2x + 1) &= 0 \\ x^2 + 3x - 7 &= 0 \end{aligned}$$

C'est une équation polynomiale de degré deux avec un discriminant $\Delta = 37$. On identifie alors deux solutions : $\frac{-3 - \sqrt{37}}{2}$ et $\frac{-3 + \sqrt{37}}{2}$.

3. Ces deux solutions étant différentes de 1 et -2 En effet $6 < \sqrt{37} < 7$ donc $\frac{3}{2} < \frac{-3 + \sqrt{37}}{2}$ et $\frac{-3 - \sqrt{37}}{2} < -\frac{9}{2}$: ces deux solutions sont donc bien différentes de 1 et -2 . Finalement, il y a deux solutions à l'équation : $\frac{-3 + \sqrt{37}}{2}$ et $\frac{-3 - \sqrt{37}}{2}$.



On peut utiliser un produit en croix à condition de bien prendre en compte, auparavant que les éventuels réels annulant la dénominateur ne peuvent être solutions.

Ainsi, dans notre exemple précédent, on peut, à l'aide d'un produit en croix, écrire que, pour $x \neq 1$ et $x \neq -2$, notre équation initiale se ramène à $(2x-3)(x+2) = (x-1)^2$. En développant et en réduisant, on aboutit de nouveau à $x^2 + 3x - 7 = 0$.



Exercice 37. Résoudre les équations suivantes :

1. $\frac{2x+8}{5-2x} = 0$

2. $\frac{3x+1}{2+6x} = 0$

3. $\frac{10x-15}{12-8x} = 0$

4. $\frac{(-6x+5)(3x-1)}{(7+3x)(6x-2)} = 0$

5. $\frac{(-x+5)(3x-1)}{(2+3x)(-7x-3)} = 0$

6. $\frac{(2x+1)(5x-4)(8x-6)}{(-4x+3)(-6x-3)} = 0$



Exercice 38. Résoudre les équations suivantes :

1. $\frac{2}{3x+1} = 5$

2. $\frac{3x+1}{6-5x} = 2$

3. $\frac{9-x^2}{x-3} = 0$

4. $\frac{3}{(x-1)(6x-2)} = \frac{4}{1-2x}$

5. $\frac{x-3}{x+1} + \frac{2x+5}{x-2} = 3$

6. $\frac{2x^2+1}{3+x} = 2x$

7. $\frac{1}{1-2x} + 4 = \frac{-4x}{2-x}$

8. $\frac{x}{3x-1} = \frac{3x-1}{x}$



Exercice 39. Soit (E) l'équation $2x^4 - 9x^3 + 8x^2 - 9x + 2 = 0$.

1. Montrer que 0 n'est pas solution de (E) .
2. Montrer que (E) peut s'écrire $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 9\left(x + \frac{1}{x}\right) + 8 = 0$.
3. Montrer que x est solution de (E) si et seulement si $X = x + \frac{1}{x}$ vérifie $2X^2 - 9X + 4 = 0$.
4. Donner les solutions de cette dernière équation puis en déduire les solutions de (E) .

5.5 Révision des leçons précédentes

Exercice 40. Soit x , y et z trois réels. Développer et réduire les expressions suivantes.



1. $A_1 = (2x - y)(x + 2y)$.
2. $A_2 = (2x + 1)(3 - x)(x + 2)$.
3. $A_3 = (x + 2y)^2 - (2xy - 1)^2 + 4x(x - 2y)$.
4. $A_4 = (x + y + z)^2$.
5. $A_5 = (-x + y - 1)(x - y - 1)$.
6. $A_6 = \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 + \frac{(1 + 2y)^2}{4} - (x - y)^2$.

Leçon 6 : Résolution d'inéquations

6.1 Résoudre une inéquation du premier degré

On note a, b des réels fixés avec $a \neq 0$. Résoudre l'inéquation $ax + b \geq 0$ d'inconnue réelle x consiste à déterminer tous les réels x vérifiant $ax + b \geq 0$. Il en est de même pour les inéquations $ax + b \leq 0$, $ax + b < 0$ ou $ax + b > 0$. Distinguons deux cas :

$a > 0$ Dans ce cas, on obtient

$$\begin{aligned} ax + b &\geq 0 \\ ax &\geq -b \\ x &\geq \frac{-b}{a} \end{aligned}$$

L'ensemble solution est donc $\left[\frac{-b}{a}; +\infty[\right]$.

$a < 0$ Dans ce cas, on est amené, lors de la dernière étape, à changer l'ordre car on divise par $a < 0$.

$$\begin{aligned} ax + b &\geq 0 \\ ax &\geq -b \\ x &\leq \frac{-b}{a} \end{aligned}$$

L'ensemble solution est donc $\left] -\infty; \frac{-b}{a} \right]$.

Exemple : Résoudre $4x - 5 < 5x + 2$

On peut procéder de diverses manières. On peut se ramener aux cas précédents :

$$\begin{aligned} 4x - 5 &< 5x + 2 \\ 0 &< 5x - 4x + 2 + 5 \\ 0 &< x + 7 \\ -7 &< x \end{aligned}$$

On peut également procéder ainsi :

$$\begin{aligned} 4x - 5 &< 5x + 2 \\ -5 - 2 &< 5x - 4x \\ -7 &< x \end{aligned}$$

Dans tous les cas, l'ensemble solution \mathcal{S} est $\left] -7; +\infty[\right]$.



Exercice 41. Résoudre les inéquations suivantes :

1. $-5x + 2 \geq 0$

3. $\frac{7x + 5}{5} < 0$

5. $5x + 2 < -3x + 4$

7. $-\sqrt{2}x - \sqrt{3} \geq 2x + \sqrt{6}$

9. $10^{-2}x - 1 < 10^{-3} - \frac{x}{10^4}$

2. $4x - 3 \leq 0$

4. $\frac{-4x}{3} - \frac{1}{4} > 0$

6. $-7x - 8 > 5x - 6$

8. $\frac{-3x}{4} + \frac{5}{7} \leq \frac{4}{3} - \frac{2x}{5}$

10. $-3x + 7 < \frac{5x}{3}$

Exercice 42. Résoudre les inéquations suivantes :



1. $2x + 7 \geq 0$

2. $3(x - 1) \leq 1 - 2x$

3. $\frac{1 - 3x}{5} < 0$

4. $\frac{x}{2} - \frac{4 - x}{4} > 5$

5. $\frac{x - 2}{3} - \frac{1 - x}{2} \geq \frac{2(2 - x)}{3}$

6. $-\sqrt{6}x - 2 > -\sqrt{2}(x + 1)$

Exercice 43. m désigne un nombre réel. Déterminer, selon les valeurs de m , l'ensemble solution de l'inéquation $(E_m) : \frac{2x + m}{x - 3} \leq 1$ d'inconnue réelle x .

6.2 Résoudre une inéquation à l'aide d'un tableau de signes

Pour résoudre une équation par factorisation :

- on se ramène à une inéquation du type $A(x) \geq 0$ (ou $A(x) \leq 0$ ou $A(x) < 0$ ou $A(x) > 0$) d'inconnue x ,
- on factorise alors au maximum $A(x)$ (si jamais aucun facteur n'est visible, il est parfois intéressant de développer pour voir si, en réduisant, des termes se simplifient), en pensant, notamment, aux identités remarquables,
- on peut faire un tableau de signes pour l'expression factorisée puis y lire l'ensemble solution.

Exemple : Résoudre l'inéquation $(x - 1)(3x + 2) > (x - 1)(5x - 4)$.

Cette inéquation est équivalente à $(x - 1)(3x + 2) - (x - 1)(5x - 4) > 0$.

On peut alors factoriser par $(x - 1)$:

$$\begin{aligned} (x - 1)(3x + 2) - (x - 1)(5x - 4) &> 0 \\ (x - 1)[(3x + 2) - (5x - 4)] &> 0 \\ (x - 1)(3x + 2 - 5x + 4) &> 0 \\ (x - 1)(-2x + 6) &> 0 \end{aligned}$$

On établit alors le tableau de signes de $(x - 1)(-2x + 6)$:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$x - 1$		$\dot{0}$		
$-2x + 6$			$\dot{0}$	
$(x - 1)(-2x + 6)$		$\dot{0}$	$\dot{0}$	

On lit alors que $(x - 1)(-2x + 6) > 0$ uniquement lorsque $1 < x < 3$. L'ensemble solution \mathcal{S} de cette inéquation est donc

$$\mathcal{S} =]1; 3[$$

Exemple : Résoudre l'inéquation $\frac{2x - 3}{3 - x} \leq 1$.

Cette inéquation est équivalente à

$$\begin{aligned} \frac{2x - 3}{3 - x} - 1 &\leq 0. \\ \frac{2x - 3}{3 - x} - \frac{3 - x}{3 - x} &\leq 0. \\ \frac{2x - 3 - 3 + x}{3 - x} &\leq 0. \\ \frac{3 - x}{3 - x} &\leq 0 \end{aligned}$$

On établit alors le tableau de signes de $\frac{3x - 6}{3 - x}$:

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$3x - 6$		0	$+$	$+$
$3 - x$	$+$		0	$-$
$\frac{3x - 6}{3 - x}$	$-$	0	$+$	$-$

On lit alors que $\frac{3x - 6}{3 - x} \leq 0$ uniquement lorsque $x \leq 2$ ou $x > 3$. L'ensemble \mathcal{S} de cette inéquation est donc

$$\mathcal{S} =]-\infty; 2] \cup]3; +\infty[$$



Lorsqu'une valeur annule le dénominateur, elle ne peut être solution : on symbolise cela par une double-barre.



Exercice 44. Résoudre les équations suivantes :

- | | |
|---|--|
| 1. $4x^3 - x > 2x^2 + x$ | 2. $x^2 < 7$ |
| 3. $x^2 > 5$ | 4. $\frac{5x - 1}{2 - 3x} \geq 2$ |
| 5. $(2x + 1)^2(5x - 3) > 0$ | 6. $\frac{2}{x - 4} > \frac{-3}{x + 1}$ |
| 7. $(x + 1)^2(5x - 2) < (2x + 2)^2(4x - 3)$ | 8. $\frac{(2x + 1)^2 - 4}{x^2 - 4x} < 0$ |
| 9. $(x^3 - 9x)(x + 1) > 0$ | |

6.3 Résoudre une inéquation polynomiale de degré 2

On appelle inéquation polynomiale de degré 2 une équation d'inconnue réelle x du type :

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \text{ ou } ax^2 + bx + c \leq 0 \text{ ou } ax^2 + bx + c < 0 \text{ ou } ax^2 + bx + c > 0$$

où a, b, c sont des réels avec $a \neq 0$.

Pour résoudre une inéquation polynomiale de degré 2 :

1. on identifie les réels a, b, c ,
2. on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$,
3. il y a trois cas possibles :

(a) si $\Delta > 0$ alors il y a deux solutions $x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$. Notons x_1 la plus petite des solutions et x_2 la plus grande. Le tableau de signe de $ax^2 + bcx + c$ est donné par :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$ax^2 + bx + c$	signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a

(b) si $\Delta = 0$ alors il y a une seule solution $x_0 = \frac{-b}{2a}$, le tableau de signe de $ax^2 + bcx + c$ est donné par :

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$ax^2 + bcx + c$	signe de a		signe de a

(c) si $\Delta < 0$ alors il n'y a aucune solution réelle. Le tableau de signe de $ax^2 + bcx + c$ est donné par :

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bcx + c$	signe de a	

Exemple : Résoudre l'inéquation $\frac{x^2 - 4x + 3}{-x^2 + 6x - 8} \leq 0$.

Le numérateur est $x^2 - 4x + 3$ avec $\Delta = 4, x_1 = 1, x_2 = 3$ et $a = 1 > 0$ d'où :

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$x^2 - 4x + 3$	+	0	-	0	+

Le dénominateur est $-x^2 + 6x - 8$ avec $\Delta = 4, x_1 = 2, x_2 = 4$ et $a = -1 < 0$ d'où :

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$	
$-x^2 + 6x - 8$	-	0	+	0	-

Récapitulons :

x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$	
$x^2 - 4x + 3$	+	0	-	0	+	+	
$-x^2 + 6x - 8$	-	0	-	0	+	0	-
$\frac{x^2 - 4x + 3}{-x^2 + 6x - 8}$	-	0	+	-	0	+	-

On en déduit que

$$\mathcal{S} =]-\infty; 1] \cup]2; 3] \cup]4; +\infty[$$

Exercice 45. Résoudre les équations suivantes :



- | | |
|---|---|
| 1. $3x^2 - 5x + 1 < 0$ | 2. $-4x + 2x^2 - 3 < 0$ |
| 3. $x^2 + x \geq -1$ | 4. $5x^2 - 4x + 1 \leq 0$ |
| 5. $x^2 - 6x + 9 \leq 0$ | 6. $\frac{x^2}{4} + x + 1 > 0$ |
| 7. $-2x^2 - 3x + 6 \leq 0$ | 8. $\sqrt{2}x^2 - 3x + \sqrt{2} \geq 0$ |
| 9. $\frac{3}{4}x^2 + \sqrt{7}x - 3 > 0$ | 10. $7x^2 + 6x < 1$ |

Exercice 46. Résoudre les équations suivantes :



- | | |
|--|---|
| 1. $\frac{-x^2 - 5x - 1}{x^2 - 4x + 4} \geq 1$ | 2. $\frac{-x^2 - 5x - 1}{x + 1} > 2x + 1$ |
|--|---|

3. $(3x - 1)^2 > 2x + 3$

4. $\frac{1}{x-2} + \frac{3}{x} \leq -2$

5. $\frac{x+4}{2x-1} \geq 2x$

6. $\frac{1}{2} \leq \frac{(x-3)^2}{(x+1)^2} \leq 1$

7. $\frac{-x^2 + 5x + 4}{7x^2 - 4x - 3} < 0$



Exercice 47. m désigne un nombre réel. Déterminer, selon les valeurs de m , l'ensemble solution de l'inéquation $(E_m) : 2m^2 + (5 - 3x)m + x^2 > 3x - 2$ d'inconnue réelle x .

6.4 Révision des leçons précédentes



Exercice 48. Écrire aussi simplement que possible les expressions suivantes.

1. $(2\sqrt{5})^2$;

2. $(2 + \sqrt{5})^2$;

3. $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$;

4. $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$;

5. $(3 + \sqrt{7})^2 - (3 - \sqrt{7})^2$;

6. $(\sqrt{2\sqrt{3}})^4$;

7. $\left(\frac{5 - \sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2$;

8. $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2$.

Leçon 7 : Exponentielle et logarithme

7.1 Propriétés des fonctions exponentielle et logarithme népérien

La **fonction exponentielle** est l'unique fonction, notée \exp , qui vérifie $\exp' = \exp$ et $\exp(0) = 1$. Si x est un réel, le nombre $\exp(x)$ peut aussi être noté e^x . On a les formules suivantes, à connaître parfaitement, où a, b sont des réels.

$$1. e^{a+b} = e^a \times e^b; \quad 2. \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}; \quad 3. \frac{1}{e^a} = e^{-a}; \quad 4. (e^a)^b = e^{a \times b}.$$

On rappelle par ailleurs que pour tout $x \geq 0$, $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. La dernière propriété fournit alors $\sqrt{e^a} = e^{\frac{a}{2}}$.

La **fonction logarithme népérien** est l'unique fonction, notée \ln , qui vérifie :

$$1. \text{ pour tout } x > 0 \ e^{\ln(x)} = x; \quad 2. \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}, \ln(e^x) = x.$$

On a donc en particulier $\ln(1) = 0$. On a de plus les propriétés suivantes, qui sont aussi à connaître parfaitement, où a et b sont des réels strictement positifs.

$$1. \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b); \quad 2. \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b);$$
$$3. \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a); \quad 4. \ln(a^b) = b \ln(a).$$

La dernière propriété fournit en particulier $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$.



Exercice 49. Exprimer uniquement à l'aide de $\ln(2)$ les quantités suivantes.

$$1. \ln(\sqrt{2}). \quad 2. \ln 8. \quad 3. \ln(2e^2). \quad 4. \ln 6 - \ln 3.$$



Exercice 50. Soit x un réel tel que les expressions suivantes soient bien définies. Simplifier le plus possible.

$$1. \frac{e^{x^2}}{(e^x)^2}; \quad 2. \frac{e^{x^2+2x}}{e^{(x+1)^2}};$$
$$3. \frac{\ln(2x)}{\ln x}; \quad 4. e^{2 \ln x};$$
$$5. \ln(2x) - \ln x; \quad 6. \ln\left(\frac{1}{x^2}\right);$$
$$7. \ln(\sqrt{3} + \sqrt{2}) + \ln(\sqrt{3} - \sqrt{2}); \quad 8. \ln(e^2 \sqrt{e}) + \ln\left(\frac{1}{e}\right);$$
$$9. \frac{\ln(e^5)}{\ln(e^3)}; \quad 10. \sqrt{e^{2x}} \cdot e^{-x};$$
$$11. \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(x^2); \quad 12. \ln(x^3 - x^2) - \ln(x - 1).$$



- Exercice 51.** 1. Écrire $A = \frac{\sqrt{e^{5x+3}}}{e^{3x} \times e^{-3x+1}}$ sous la forme $A = e^y$ avec $y \in \mathbf{R}$.
2. Écrire $B = \ln\left(\frac{e^2 \times 24}{e^3} \times e^2\right)$ sous la forme $B = m + n \ln 2 + p \ln 3$ avec $m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}$ et $p \in \mathbf{Z}$.

7.2 Résolution d'équations avec exp

Pour résoudre une équation avec exp, on utilise la propriété suivante : pour tous réels a et b ,

$$\begin{array}{l} \exp(a) = \exp(b) \\ \text{si et seulement si} \quad a = b. \end{array}$$

Par exemple, résolvons $e^{2x+1} - 3 = 0$. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} e^{2x+1} - 3 &= 0 \\ e^{3x+1} &= 3 \\ e^{2x+1} &= e^{\ln(3)} && \text{(on se ramène à la forme donnée dans la propriété)} \\ 2x + 1 &= \ln(3) && \text{(on est ramené à une équation du premier degré)} \\ 2x &= \ln(3) - 1 \\ x &= \frac{\ln(3) - 1}{2}. \end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{ \frac{\ln(3) - 1}{2} \right\}$.

Notons qu'on aurait pu aller plus vite pour passer de $e^{2x+1} = 3$ à $2x + 1 = \ln(3)$ en composant directement par la fonction \ln , puisque $\ln(e^{2x+1}) = 2x + 1$.

Il faut aussi retenir que la fonction exponentielle ne prend que des valeurs strictement positives, ce qui signifie que pour tout $A(x)$ réel, $e^{A(x)} > 0$. Par exemple, l'équation

$$e^{4x+1} = -1$$

n'admet pas de solution car pour tout $x \in \mathbf{R}$, $e^{4x+1} > 0$ (et donc e^{4x+1} ne peut jamais être égal à un nombre négatif!).

Exercice 52. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue x réelle.



- | | | | |
|---------------------|--------------------|----------------------|----------------------|
| 1. $e^x = e^{-2}$; | 2. $e^x = e$; | 3. $e^{x+2} = e^3$; | 4. $e^{2x+1} = 2$; |
| 5. $e^x = 1$; | 6. $e^x + 4 = 0$; | 7. $e^{x^2} = e$; | 8. $e^{x^2+1} = 1$; |

Exercice 53. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue x réelle.



- | | | |
|---------------------------------|---------------------------------------|------------------------------|
| 1. $(e^x - 3)(e^x + 3) = 0$; | 2. $(3x + 1)e^x = 0$; | 3. $(2x - 1)e^x = e^x$; |
| 4. $xe^{x+3} = 2e^{x+3}$; | 5. $-e^{x^2+3} = \frac{1}{e^{x+3}}$; | 6. $e^{4x} + e^x = 0$; |
| 7. $e^{6x} - 4e^{3x} + 4 = 0$; | 8. $9e^{-2x} - 6 + e^{2x} = 0$; | 9. $e^x - 3 + 2e^{-x} = 0$. |

7.3 Résolution d'équations avec ln

Pour résoudre une équation avec \ln , on utilise la propriété suivante : pour tous réels a et b **strictement positifs**,

$$\begin{array}{l} \ln(a) = \ln(b) \\ \text{si et seulement si} \quad a = b. \end{array}$$

Par exemple, résolvons $\ln(2x + 1) - 3 = 0$. Attention, ici on ne peut pas travailler avec n'importe quel réel. L'expression $\ln(2x + 1)$ existe si et seulement si $2x + 1 > 0$, c'est-à-dire $x > -\frac{1}{2}$. On se fixe donc un réel x dans $\left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[$ pour la suite. On dit que $\left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[$ est l'**ensemble (ou domaine) de définition** de l'équation. Quand on résout une équation, on commence toujours par chercher l'ensemble de définition (et il faut que les solutions qu'on obtient par le calcul appartiennent effectivement à cet ensemble pour être des « vraies » solutions).

$$\begin{aligned} \ln(2x + 1) - 3 &= 0 \\ \ln(2x + 1) &= 3 \\ \ln(2x + 1) &= \ln(e^3) && \text{(on se ramène à la forme donnée dans la propriété)} \\ 2x + 1 &= e^3 && \text{(on est ramené à une équation du premier degré)} \\ 2x &= e^3 - 1 \\ x &= \frac{e^3 - 1}{2}. \end{aligned}$$

Or $\frac{e^3 - 1}{2} > \frac{1}{2}$ (vous pouvez utiliser la calculatrice pour le moment pour ce type de vérification; notons qu'on peut faire aussi sans, puisque $e \approx 2,71$ est une valeur à connaître, d'où $e^3 \geq 2$ puis $e^3 - 1 \geq 1$ et ainsi $\frac{e^3 - 1}{2} > \frac{1}{2}$; on reviendra sur l'obtention de telles inégalités dans une leçon ultérieure). Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{ \frac{e^3 - 1}{2} \right\}$.

Notons qu'on aurait pu aller plus vite pour passer de $\ln(2x + 1) = 3$ à $2x + 1 = e^3$ en composant directement par la fonction exp, puisque $\exp(\ln(2x + 1)) = 2x + 1$.



Exercice 54. Déterminer le domaine de définition des équations suivantes, puis les résoudre.

- | | |
|--|--|
| 1. $\ln(1 + 3x) = \ln(x + 1)$; | 2. $\ln(2x + 1) = \ln(x^2 - 1)$; |
| 3. $\ln(x - 3) - 1 = 0$; | 4. $\ln(x) + \ln(x - 1) = 0$; |
| 5. $\ln(4 - x) = 0$; | 6. $\ln(x) - \ln(1 - x) = \ln(2)$; |
| 7. $\ln(2x + 1) + \ln(x - 3) = \ln(x + 5)$; | 8. $\ln(x - 1) + \ln(2 - x) = \ln(6x)$; |
| 9. $\ln(x - 2) + \ln(x) = \ln(3)$; | 10. $\ln(x(x - 2)) = \ln(3)$; |
| 11. $\ln(x^2 + 5x + 6) = \ln(x + 11)$; | 12. $2 \ln(x)^2 + 3 \ln(x) - 2 = 0$. |

Vous pouvez utiliser que $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 1$ et $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \leq 1$ (on expliquera dans une leçon ultérieure comment obtenir ces inégalités).

7.4 Résolution d'inéquations avec exp

Pour résoudre une inéquation avec exp, on utilise une des propriétés suivantes : pour tous réels a et b ,

$$\exp(a) \leq \exp(b) \text{ si et seulement si } a \leq b$$

et

$$\exp(a) < \exp(b) \text{ si et seulement si } a < b$$

(notons qu'on peut remplacer \leq par \geq et $<$ par $>$, ce qui revient à échanger a et b).

Par exemple, résolvons $e^{2x+1} - 3 \leq 0$. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} e^{2x+1} - 3 &\leq 0 \\ e^{2x+1} &\leq 3 \\ e^{2x+1} &\leq e^{\ln(3)} && \text{(on se ramène à la forme donnée dans la propriété)} \\ 2x + 1 &\leq \ln(3) && \text{(on est ramené à une équation du premier degré)} \\ 2x &\leq \ln(3) - 1 \\ x &\leq \frac{\ln(3) - 1}{2}. \end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\left] -\infty; \frac{\ln(3) - 1}{2} \right]$.

Notons qu'on aurait pu aller plus vite en composant directement par la fonction logarithme népérien :

$$e^{2x+1} \leq 3 \iff 2x + 1 \leq \ln(3).$$

On rappelle aussi que la fonction exponentielle ne prend que des valeurs positives. Cela entraîne par exemple que l'inéquation

$$e^{x+2} \leq -1$$

n'admet pas de solution (l'ensemble des solutions est \emptyset). De plus,

$$e^{x+2} \geq -1$$

admet tous les réels comme solution (l'ensemble des solutions est \mathbf{R}), puisque pour n'importe quel x réel, on a $e^{x+2} > 0$, donc en particulier $e^{x+2} \geq -1$.

Exercice 55. Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue x réelle.



- | | | | |
|------------------------|-------------------------|-------------------------|-----------------------|
| 1. $e^{2x} > e^{-2}$; | 2. $e^{-3x} < e$; | 3. $e^x \leq -1$; | 4. $e^x \geq -1$; |
| 5. $e^{3x-5} \geq 3$; | 6. $e^{3x-5} \geq -3$; | 7. $e^{-2x-1} \leq 1$; | 8. $e^{x^2+1} < -4$. |

Exercice 56. Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue x réelle.



- | | |
|-------------------------------|--------------------------------------|
| 1. $e^{x+1} < 1$; | 2. $-3e^{x^2-4} > 4$; |
| 3. $e^{-2x+5} \geq 0$; | 4. $e^{x+4} \leq \frac{1}{e^{3x}}$; |
| 5. $(x-1)e^x > 0$; | 6. $(-2x+3)e^x < 0$; |
| 7. $x^2e^{-2x+5} \geq 0$; | 8. $\frac{x-4}{e^x} \leq 0$; |
| 9. $e^{2x} - 7e^x + 12 > 0$; | 10. $e^{2x} + e^x - 6 > 0$. |

7.5 Résolution d'inéquations avec \ln

Pour résoudre une inéquation avec \ln , on utilise une des propriétés suivantes : pour tous réels a et b strictement positifs,

$$\ln(a) \leq \ln(b) \text{ si et seulement si } a \leq b$$

et

$$\ln(a) < \ln(b) \text{ si et seulement si } a < b$$

(notons qu'on peut remplacer \leq par \geq et $<$ par $>$, ce qui revient à échanger a et b).

Par exemple, résolvons $\ln(2x + 1) - 3 \leq 0$. Attention, ici on ne peut pas travailler avec n'importe quel réel. L'expression $\ln(2x + 1)$ existe si et seulement si $2x + 1 > 0$, c'est-à-dire $x > -\frac{1}{2}$. On se fixe donc un réel x dans $\left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[$ pour la suite.

$$\begin{aligned} \ln(2x + 1) - 3 &\leq 0 \\ \ln(2x + 1) &\leq 3 \\ \ln(2x + 1) &\leq \ln(e^3) && \text{(on se ramène à la forme donnée dans la propriété)} \\ 2x + 1 &\leq e^3 && \text{(on est ramené à une équation du premier degré)} \\ 2x &\leq e^3 - 1 \\ x &\leq \frac{e^3 - 1}{2}. \end{aligned}$$

Or on rappelle qu'au départ on a choisi $x > -\frac{1}{2}$. Finalement, l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\left] -\frac{1}{2}; \frac{e^3 - 1}{2} \right]$.

Notons qu'on aurait pu aller plus vite en composant directement par la fonction exponentielle :

$$\begin{aligned} \ln(2x + 1) &\leq 3 \\ 2x + 1 &\leq e^3. \end{aligned}$$



Exercice 57. Déterminer le domaine de définition des inéquations suivantes, puis les résoudre.

- | | |
|-----------------------------------|---|
| 1. $\ln(x) \leq 3$; | 2. $\ln(x) > e$; |
| 3. $\ln(2x - 1) > -1$; | 4. $\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) \geq \ln 3$; |
| 5. $\ln(x) \leq \ln(x^2 - 2x)$; | 6. $\ln(x + 2) \geq 0$; |
| 7. $\ln(x - 1) < 0$; | 8. $2 \ln(x + 1) \leq 0$; |
| 9. $2 \ln(x) + 1 \geq 0$; | 10. $\ln(x + 4) \geq 0$; |
| 11. $\ln(x)(2 - \ln(x)) \geq 0$; | 12. $\ln(x)^2 + 4 \ln(x) + 4 \geq 0$. |

La fonction logarithme népérien peut aider aussi pour déterminer un entier n tel qu'une suite géométrique dépasse un certain seuil, c'est-à-dire à résoudre des inéquations du type

$$q^n \geq a \quad \text{ou} \quad q^n \leq a$$

(ou encore ces mêmes inéquations en remplaçant \leq par $<$, \geq par $>$). Pour résoudre ce type d'inéquation, il faut commencer par composer par \ln et se rappeler que $\ln(q^n) = n \ln(q)$.

Par exemple, déterminons le plus petit entier n tel que $2^n > 50$. On a

$$\begin{aligned} 2^n &> 50 \\ \ln(2^n) &> \ln(50) \\ n \ln(2) &> \ln(50) \\ n &> \frac{\ln(50)}{\ln(2)}. \end{aligned}$$


Donc le plus petit n tel que $2^n > 50$ est le premier entier supérieur au réel $\frac{\ln(50)}{\ln(2)}$.



Exercice 58. Dans chaque cas, déterminer le plus petit entier n qui vérifie l'inégalité proposée.

1. $3^n > 125$;
2. $5^n \geq 10\,000$;
3. $0,5^n < 0,01$;
4. $\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq 10^{-4}$;
5. $2^{n-6} > 100$;
6. $0,8^n \leq 0,05$;
7. $1 - 0,3^n > 0,95$;
8. $\frac{4^n}{5^{n-1}} < 1$.

7.6 Révision des leçons précédentes

Exercice 59. Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme $2^n \cdot 2^p$, où n et p sont deux entiers relatifs. 

1. $\frac{2^3 \cdot 3^2}{3^4 \cdot 2^8 \cdot 6^{-1}}$;
2. $2^{21} + 2^{22}$;
3. $\frac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}}$;
4. $\frac{(3^2 \cdot (-2)^4)^8}{((-3)^5 \cdot 2^3)^{-2}}$.

Leçon 8 : Dérivation

8.1 Dérivation d'une fonction

Le tableau qui suit donne les dérivées usuelles, à connaître par cœur !! Les notations suivantes sont utilisées : c est une constante réelle, n est un entier naturel non nul et m est un entier négatif.

Expression de f	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité	Expression de f'
c	\mathbf{R}	\mathbf{R}	0
x^n	\mathbf{R}	\mathbf{R}	nx^{n-1}
x^m	\mathbf{R}^*	\mathbf{R}^*	mx^{m-1}
e^x	\mathbf{R}	\mathbf{R}	e^x
$\ln(x)$	\mathbf{R}_+^*	\mathbf{R}_+^*	$\frac{1}{x}$

On dispose également des formules suivantes, valables pour u et v deux fonctions définies sur un intervalle I de \mathbf{R} et où λ , a , b sont des réels quelconques.

Expression de f	Expression de f'	Condition
$u(x) + v(x)$	$u'(x) + v'(x)$	
$\lambda u(x)$	$\lambda u'(x)$	
$u(x) \times v(x)$	$u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$	
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{(v(x))^2}$	v ne s'annule pas sur I
$\frac{1}{u(x)}$	$\frac{-u'(x)}{(u(x))^2}$	u ne s'annule pas sur I
$(u(x))^n$	$nu'(x)(u(x))^{n-1}$	
$(u(x))^m$	$mu'(x)(u(x))^{m-1}$	u ne s'annule pas sur I
$\ln(u(x))$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$u > 0$ sur I
$e^{u(x)}$	$u'(x)e^{u(x)}$	
$u(ax + b)$	$au'(ax + b)$	pour tout x vérifiant $ax + b \in I$



Exercice 60. Dériver les fonctions f définies par :

- | | | |
|---|-----------------------------------|-------------------------------------|
| 1. $f(x) = x \ln(x)$ | 2. $f(x) = \frac{e^x}{x}$ | 3. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ |
| 4. $f(x) = e^{x^2+x+1}$ | 5. $f(x) = (2x - 1)^2$ | 6. $f(x) = \frac{x^2 - 5}{x^2 + 1}$ |
| 7. $f(x) = \ln(e^x + 1)$ | 8. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ | 9. $f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$ |
| 10. $f(x) = (e^{2x} + 1)^8$ | 11. $f(x) = (x + 2) \ln(x^4 + 1)$ | 12. $f(x) = (3e^{5x} + 1)^7$ |
| 13. $f(x) = \frac{1}{2x + 5} - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2}$ | 14. $f(x) = (1 + \ln(x))^3$ | 15. $f(x) = e^{\frac{1}{x-4}}$ |



Exercice 61. Dans cet exercice a désigne un réel fixé. Dériver les fonctions f définies par :

- | | | |
|--|----------------------------------|-----------------------------|
| 1. $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right)$ | 2. $f(x) = \ln(3 + e^{ax})$ | 3. $f(x) = (ax + 1)^7$ |
| 4. $f(x) = \frac{x - a}{x + a}$ | 5. $f(x) = \frac{2}{(ax + 1)^5}$ | 6. $f(x) = x^3 + 2ax^2 - 1$ |
| 7. $f(x) = \ln(\ln(ax))$ | 8. $f(x) = e^{ax^2}$ | 9. $f(x) = (e^{ax} + 1)^5$ |



Exercice 62. On note a un réel fixé. On note \mathcal{F} l'ensemble des fonctions f dérivables sur \mathbf{R} et vérifiant pour tout réel x , $f'(x) = af(x)$.

- Soit K un réel fixé. Montrer que la fonction f_K définie sur \mathbf{R} par $f(x) = Ke^{ax}$ appartient à \mathcal{F} .
- Soit g une fonction appartenant à \mathcal{F} . Montrer que la fonction $t : x \mapsto \frac{g(x)}{e^{ax}}$ est dérivable, de dérivée nulle. En déduire qu'il existe une constante K réelle telle que pour tout réel x , $g(x) = Ke^{ax}$.
- En déduire l'ensemble des fonctions composant \mathcal{F} .



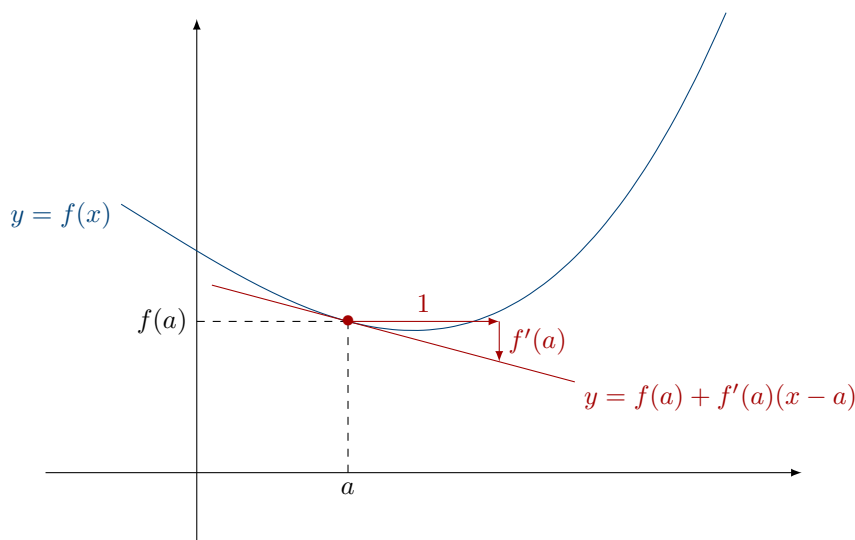
Exercice 63. Dériver les fonctions f définies par :

- | | | |
|------------------------------------|----------------------------------|---|
| 1. $f(x) = (x^3 - 1)^4$ | 2. $f(x) = \ln(x) - \frac{1}{x}$ | 3. $f(x) = (x^2 + 1)e^{-x^2}$ |
| 4. $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ | 5. $f(x) = e^{x \ln(x)}$ | 6. $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ |

8.2 Tangente à un graphe

Du point de vue géométrique, si f est dérivable en a , le nombre $f'(a)$ est la pente de la tangente au graphe de f au point d'abscisse a .

Plus généralement, l'équation réduite de cette tangente est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.



Par exemple, déterminons l'équation réduite de la tangente au graphe $f : x \mapsto 3x^2 + 5x + 1$ en -2 . On a $f(-2) = 3$ et pour tout x réel, $f'(x) = 6x + 5$ donc $f'(-2) = -7$. Ainsi, la tangente a pour équation réduite $y = -7(x - (-2)) + 3$ c'est à dire $y = -7x + 17$



Exercice 64. Déterminer, dans chacun des cas suivants, l'équation réduite de la tangente en a pour la fonction f .

1. $f; x \mapsto x^3 - 3x + 1, a = 0.$

2. $f; x \mapsto \frac{x^2}{3x - 9}, a = 1.$

3. $f; x \mapsto \frac{x + 1}{x - 1}, a = 2.$

4. $f; x \mapsto x + 2 + \frac{4}{x - 2}, a = -2.$



Exercice 65. On considère la fonction f définie sur \mathbf{R} par $f(x) = ax^2 + 2x + b$ où a et b sont deux réels. Déterminer les valeurs de a et b telles que le graphe de f admette au point $A(1; -1)$ une tangente parallèle à la droite d'équation réduite $y = -4x$.



Exercice 66. Déterminer l'équation réduite de la tangente en 0 pour la fonction $f : x \mapsto \ln(x^2 + x + 1)$.



Exercice 67. On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ et \mathcal{T}_a la tangente à son graphe au point M d'abscisse $a > 0$.

- Montrer que \mathcal{T}_a coupe l'axe des abscisses. On notera A ce point et B le point d'intersection de \mathcal{T}_a avec l'axe des ordonnées.
- Montrer que M est le milieu de $[AB]$.



Exercice 68. Soient a un nombre réel non nul, x_1 et x_2 deux nombres réels tels que $x_1 < x_2$, f la fonction définie sur \mathbf{R} par $f(x) = ax^2$. Montrer que la tangente au graphe de f au point d'abscisse $x_1 + x_2$ est parallèle à la droite joignant les points du graphe de f d'abscisses x_1 et x_2 .

8.3 Révision des leçons précédentes



Exercice 69. Soit a et b deux nombres réels, avec b non nul. Effectuer les opérations suivantes et donner les résultats sous forme de fractions irréductibles.

1. $A = \frac{4}{7} + \left(\frac{13}{28} - \frac{5}{14} \right);$

2. $B = 2 - \left(\frac{7}{15} - \frac{3}{10} \right);$

3. $C = \frac{1}{3} - \left(\frac{5}{6} - \frac{3}{4} \right);$

5. $E = a - \frac{a}{5};$

4. $D = \frac{7a}{5} - \frac{2a}{5};$

6. $F = 2 + \frac{a}{b} - \frac{a}{3b}.$

Leçon 9 : Variations d'une fonction

9.1 Étude des variations d'une fonction

Pour étudier les variations d'une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I (on rappelle qu'un intervalle est un ensemble de la forme $]a; b[$, $]a; b]$, $[a; b[$ ou $[a; b]$, avec $a \leq b$ des réels ou éventuellement $-\infty, +\infty$), on utilise le résultat suivant :

- Si $f' \geq 0$, alors la fonction est croissante.
- Si $f' \leq 0$, alors la fonction est décroissante.
- Si $f' > 0$, alors la fonction est strictement croissante.
- Si $f' < 0$, alors la fonction est strictement décroissante.

L'étude des variations se fait donc toujours en trois temps :

1. On détermine l'expression de la dérivée de f .
2. On détermine le signe de $f'(x)$ en fonction de x (souvent dans un tableau de signes).
3. On donne les variations de la fonction (le tableau de variations est souvent inscrit immédiatement après le tableau de signe déterminé à l'étape précédente).

Par exemple, déterminons les variations de la fonction $f : x \mapsto -x^3 + x^2 + x$, définie sur \mathbf{R} . La fonction f est dérivable sur \mathbf{R} et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = -3x^2 + 2x + 1$. Ainsi, f' est une fonction polynomiale de degré 2, dont le discriminant vaut $2^2 - 4 \cdot (-3) = 16$, ce qui entraîne que ses racines sont $\frac{-2 - \sqrt{16}}{2 \cdot (-3)} = 1$ et $\frac{-2 + \sqrt{16}}{2 \cdot (-3)} = -\frac{1}{3}$. Or, le signe d'un trinôme est celui de son coefficient dominant sauf entre ses racines, d'où :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$		
$f'(x)$		-	0	+	0	-
f		↘ ↗		↘		

Notons que si on veut un tableau de variation complet, il faut aussi indiquer les différentes « valeurs au bout des flèches ». Par exemple ici, il faut calculer $f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{5}{27}$ et $f(1) = 1$. Il faut aussi déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$. Il y a des formes indéterminées, qu'on lève en factorisation par le monôme de plus haut degré : pour tout $x \neq 0$,

$$f(x) = x^3 \left(-1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right).$$

Sous cette forme, on obtient rapidement que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. On a alors :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$			
f	$+\infty$	↘	$-\frac{5}{27}$	↗	1	↘	$-\infty$

Si vous n'êtes pas à l'aise avec le calcul des limites, vous pouvez laisser ce problème de côté pour le moment, nous y reviendrons plus tard.

Exercice 70. Déterminer les variations des fonctions suivantes.

- | | |
|---|---|
| 1. $f : x \mapsto -x^2 + 4x + 5$ définie sur \mathbf{R} . | 2. $f : x \mapsto -x^3 + 3x$ définie sur \mathbf{R} . |
| 3. $f : x \mapsto x^3 - x^2 - x + 1$ définie sur \mathbf{R} . | 4. $f : x \mapsto x^4 + 8x^2 + 8$ définie sur \mathbf{R} . |
| 5. $f : x \mapsto \frac{x+2}{x-1}$ définie sur $\mathbf{R} \setminus \{1\}$. | 6. $f : x \mapsto \frac{-4x}{x^2+1}$ définie sur \mathbf{R} . |
| 7. $f : x \mapsto \frac{x^2-x-2}{(x-1)^2}$ définie sur $\mathbf{R} \setminus \{1\}$. | 8. $f : x \mapsto x-1 + \frac{4}{x-2}$ définie sur $\mathbf{R} \setminus \{2\}$. |

Exercice 71. On considère la fonction f définie sur \mathbf{R} par $f(x) = e^{-3x}$. Étudier les variations de f sur \mathbf{R} .



Exercice 72. On considère la fonction f définie sur \mathbf{R} par $f(x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2}$. Étudier les variations de f .



Exercice 73. On considère la fonction f définie sur \mathbf{R}_+ par l'expression

$$f(x) = (5x^2 + 5x - 4)\sqrt{x}.$$



1. Établir que la fonction f' , dérivée de la fonction f , admet pour expression :

$$f'(x) = \frac{25x^2 + 15x - 4}{2\sqrt{x}}.$$

2. Dresser le tableau de variations de la fonction f .

Exercice 74. Étudier les variations de $f : x \mapsto (x+1)\ln(x)$ sur $]1; +\infty[$.



Exercice 75. Étudier les variations de $f : x \mapsto 2\ln(x) - 5x$ sur $]0; +\infty[$.



Exercice 76.

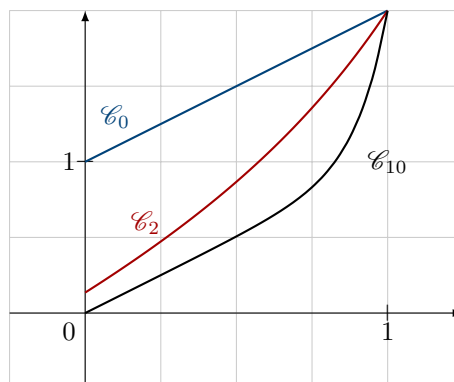


Pour tout entier naturel n , on considère la fonction f_n définie sur $[0; 1]$ par

$$f_n(x) = x + e^{n(x-1)}.$$

On note \mathcal{C}_n la courbe représentative de f_n .

- Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction f_n est strictement positive.
- Démontrer que, pour tout entier naturel n , la fonction f_n est strictement croissante.
- Montrer qu'il existe un point A du plan qui appartient à toutes les courbes \mathcal{C}_n (où n peut être n'importe quel entier naturel).



9.2 Révision des leçons précédentes

Exercice 77. Étudier le signe des expressions suivantes sur \mathbf{R} .



- | | | | |
|-----------------|--------------------|-----------------------------|------------------------------|
| 1. $5e^x - 5$; | 2. $(3x - 1)e^x$; | 3. $(-8x+4)(3x-1)e^{x-2}$; | 4. $\frac{6x-5}{e^{3x-1}}$. |
|-----------------|--------------------|-----------------------------|------------------------------|

Leçon 10 : Établir une inégalité

10.1 Règles de calcul sur les inégalités

On rappelle les principales règles de calcul avec les inégalités. Soit a, b et c trois réels.

1. On peut ajouter ou retrancher un terme dans une inégalité. Si $a \leq b$, alors $a + c \leq b + c$ et $a - c \leq b - c$.
2. On peut multiplier une inégalité par un nombre positif sans changer le sens de l'inégalité. Si $a \leq b$ et $c \geq 0$, alors $ac \leq bc$.
3. On peut multiplier une inégalité par un nombre positif en changeant le sens de l'inégalité. Si $a \leq b$ et $c \leq 0$, alors $ac \geq bc$.
4. On peut passer à l'inverse pour des nombres **non nuls et de même signes**, en changeant le sens de l'inégalité.
 - Si $0 < a \leq b$, alors $0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$.
 - Si $a \leq b < 0$, alors $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a} < 0$.
5. Plus généralement, on peut composer par une fonction croissante sans changer le sens de l'inégalité : si f est une fonction croissante définie sur un intervalle I , si a et b sont éléments de I avec $a \leq b$, alors $f(a) \leq f(b)$.
6. Si on compose par une fonction décroissante, on change le sens de l'inégalité : si f est une fonction décroissante définie sur un intervalle I , si a et b sont éléments de I avec $a \leq b$, alors $f(a) \geq f(b)$.

Notons qu'à partir de ces deux derniers points, on peut retrouver les premiers. Par exemple, dans **1.** on applique les fonctions $f : x \mapsto c + x$ et $f : x \mapsto x - c$, qui sont croissantes. Pour **2.** et **3.**, on applique la fonction $f : x \mapsto cx$, qui est croissante lorsque $c \geq 0$ et décroissante quand $x \leq 0$. Enfin, la fonction inverse étant décroissante sur \mathbf{R}_+^* et sur \mathbf{R}_-^* , on retrouve le point **4.**

On rappelle que les fonctions \ln , \exp , $x \mapsto \sqrt{x}$ sont croissantes sur leur ensemble de définition. Soit $n \in \mathbf{N}$. La fonction $x \mapsto x^n$ est toujours croissante sur \mathbf{R}_+ . Sur \mathbf{R}_- , la fonction $x \mapsto x^n$ est croissante si n est impair, elle est décroissante si n est pair.

Montrons comment appliquer les propriétés précédentes, et cherchons à encadrer $\sqrt{-\frac{x}{2}} - 3$ lorsque $x \in [-7; -6]$. On a :

$$\begin{aligned} & -7 \leq x \leq -6 \\ \text{donc } & -\frac{1}{2} \cdot (-7) \geq -\frac{1}{2} \cdot x \geq -\frac{1}{2} \cdot (-6) && \text{on multiplie par } -\frac{1}{2} \leq 0, \text{ voir propriété } \mathbf{3}. \\ \text{donc } & \frac{7}{2} \geq -\frac{x}{2} \geq 3 && \text{on simplifie} \\ \text{donc } & \frac{7}{2} - 3 \geq -\frac{x}{2} - 3 \geq 3 - 3 && \text{on ajoute } -3, \text{ voir propriété } \mathbf{1}. \\ \text{donc } & \frac{1}{2} \geq -\frac{x}{2} - 3 \geq 0 && \text{on simplifie} \\ \text{donc } & \sqrt{\frac{1}{2}} \geq \sqrt{-\frac{x}{2} - 3} \geq \sqrt{0} && \text{on applique la fonction racine carrée, croissante, voir } \mathbf{5}. \\ \text{donc } & \frac{\sqrt{2}}{2} \geq \sqrt{-\frac{x}{2} - 3} \geq 0 && \text{on simplifie.} \end{aligned}$$

L'idée a consisté à partir de ce que l'on savait, à savoir $x \in [-7; -6]$, puis de chercher à reconstituer l'expression que l'on demandait d'encadrer.

Exercice 78. Soit $x \in [2; 3]$. Déterminer un encadrement des nombres suivantes.



1. $A(x) = 7x + 3$;
2. $B(x) = -x + 1$;
3. $C(x) = \frac{1}{7x - 3}$;
4. $D(x) = \exp\left(x + \frac{2}{3}\right)$;
5. $E(x) = \ln(-(-x + 1)^3)$;
6. $F(x) = \left(\frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{2}}\right)^3$.

Exercice 79. Soit f la fonction définie sur \mathbf{R}_+^* par $f(x) = 2 + \ln(x)$.



1. Déterminer l'expression de la dérivée de f .
2. Montrer que, pour tout $x \in [3; 4]$, $-\frac{1}{3} \leq f'(x) \leq \frac{1}{3}$.

10.2 Encadrer des racines carrées

Pour encadrer une racine carrée \sqrt{a} (où $a \geq 0$), on procède en deux étapes.

1. On encadre a entre les deux carrés parfaits les plus proches n^2 et m^2 (où n et m sont des entiers naturels) : $n^2 \leq a \leq m^2$.
2. On compose par la fonction racine carrée, croissante : $n \leq \sqrt{a} \leq m$.

Par exemple, encadrons $\sqrt{73}$ entre deux entiers consécutifs.

$$\begin{aligned} 64 &\leq 73 \leq 81 \\ \text{donc } \sqrt{64} &\leq \sqrt{73} \leq \sqrt{81} && \text{on compose par la fonction racine carrée, croissante} \\ \text{donc } 8 &\leq \sqrt{73} \leq 9 && \text{on simplifie.} \end{aligned}$$

Exercice 80. 1. Justifier que $5 \leq \sqrt{29} \leq 6$.



2. Résoudre dans \mathbf{R} l'équation $x^2 - x - 7 = 0$ et donner un encadrement des solutions.

Exercice 81. Déterminer l'unique solution de l'équation



$$\frac{1}{5}(3 + x^2) = x$$

sur $[0; 1]$.

10.3 Établir une inégalité avec les variations d'une fonction

Ici, on utilise les propriétés 5. et 6. présentées dans le paragraphe précédent.

Exercice 82. On considère la fonction f définie par



$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f .
2. Donner le tableau de variations de f .
3. Justifier que si $x \leq -1$, alors $f(x) \leq -1$.

Exercice 83. On considère la fonction f définie par



$$f(x) = \frac{2x - 1}{x + 4}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f .
2. Donner le tableau de variations de f .
3. Justifier que si $x \geq -1$, alors $f(x) \geq -1$.



Exercice 84. On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = x - \ln(x).$$

1. Donner les variations de f .
2. Montrer que si $x \in [1; 2]$, alors $f(x) \in [1; 2]$.

10.4 Se ramener à une étude de signe

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I . On suppose qu'on demande d'obtenir, pour tout $x \in I$,

$$f(x) \leq g(x).$$

Pour cela, on peut plutôt chercher à montrer l'inégalité équivalente

$$g(x) - f(x) \geq 0.$$

L'intérêt est qu'on dispose de beaucoup d'outils pour obtenir le signe d'une expression, comme le tableau de signes par exemple. On peut aussi étudier les variations de la fonction $h : x \mapsto g(x) - f(x)$.



Exercice 85. Montrer que, pour tout $k \geq 2$,

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$



Exercice 86. 1. (a) Étudier les variations de la fonction $h : x \mapsto e^x - x - 1$ sur \mathbf{R} .

(b) En déduire le signe de $h(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

(c) Justifier que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $e^x \geq x + 1$.

2. En vous inspirant de la question précédente, montrer que pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.



Exercice 87. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = (1-x) \ln(1-x) + x.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Étudier les variations de f .
3. Déterminer le signe de f .
4. Montrer que, pour tout $x < 1$,

$$1-x \geq \exp\left(\frac{x}{x-1}\right).$$

10.5 Obtenir le signe de la dérivée

Dans certains exercices, le signe de la dérivée f' n'est pas aisé à obtenir directement. On étudie alors séparément le signe de f' pour en déduire les variations de f . On donne quelques exercices illustrant cette méthode ci-après.



Exercice 88. On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 2 - 3 \ln(x)}{x},$$

ainsi que la fonction φ définie sur $]0; +\infty[$

$$\varphi(x) = x^2 - 1 + 3 \ln(x).$$

1. (a) Calculer $\varphi(1)$.
- (b) Étudier les variations de φ sur $]0; +\infty[$.
- (c) En déduire le signe de $\varphi(x)$ selon les valeurs de x .
2. Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{\varphi(x)}{x^2}$.
3. En déduire le tableau de variations de f .

Exercice 89. On considère, pour entier naturel non nul n , la fonction f_n définie sur \mathbf{R} par



$$f_n(x) = \frac{1}{1 + e^x} + nx.$$

1. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f'_n , dérivée de f_n . *Remarque :* vous pourrez noter f''_n la dérivée de f'_n .
2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. En déduire que $x \mapsto f_n(x)$ est strictement croissante sur \mathbf{R} .

10.6 Révision des leçons précédentes


Exercice 90. On considère la fonction $h : x \mapsto \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 5x + 6}$.



1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h .
2. Déterminer le tableau de variations complet de h .

Exercices d'entraînement supplémentaires

11.1 Fractions

 **Exercice 91.** Soit a et b deux nombres réels positifs non nuls. Simplifier au maximum les expressions suivantes.

1. $A = \frac{2}{\frac{2}{3} + 2}$;

2. $B = \frac{a + \frac{1}{a}}{a}$;

3. $C = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}$;

4. $D = \frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a}$.


 **Exercice 92.** Écrire chacun des nombres suivants sous la forme d'une fraction irréductible.

1. $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$;

2. $B = \frac{1}{24} - \frac{1}{16}$;

3. $C = \frac{\frac{7}{15} + \frac{1}{3}}{\frac{4}{4} + \frac{1}{5}}$;

4. $D = \frac{\frac{3}{4} + \frac{9}{8} \times \frac{1}{12}}{2 - \frac{4}{3}}$.


 **Exercice 93.** Simplifier les fractions suivantes. La lettre k désigne un entier naturel non nul.

1. $A = \frac{32}{40}$;

2. $B = 8^3 \times \frac{1}{4^2}$;

3. $C = \frac{27^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4}$;

4. $D = \frac{(-2)^{2k+1} \times 3^{2k-1}}{4^k \times 3^{-k+1}}$.


 **Exercice 94.** Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.


1. $A = (2 \times 3 \times 5 \times 7) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \right)$;

2. $B = \left(\frac{136}{15} - \frac{28}{5} + \frac{62}{10} \right) \times \frac{21}{24}$;

3. $C = \frac{5^{10} \times 7^3 - 25^5 \times 49^2}{(125 \times 7)^3 + 5^9 \times 14^3}$;

4. $D = \frac{1\,978 \times 1\,979 + 1\,980 \times 21 + 1\,958}{1\,980 \times 1\,979 - 1\,978 \times 1\,979}$.

 **Exercice 95.** Écrire $A = \frac{0,5 - \frac{3}{17} + \frac{3}{37}}{\frac{5}{6} - \frac{1}{17} + \frac{1}{37}} + \frac{0,5 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 0,2}{\frac{5}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 3,5}$ sous forme d'une fraction irréductible.


 **Exercice 96.** En utilisant les entités remarquables et le calcul littéral, calculer les nombres suivants.

1. $A = \frac{2\,022}{(-2\,022)^2 + (-2\,021) \times 2\,023}$;

2. $B = \frac{2\,021^2}{2\,020^2 + 2\,022^2 - 2}$;

3. $C = \frac{1\,235 \times 2\,469 - 1\,234}{1\,234 \times 2\,469 + 1\,235}$;

4. $D = \frac{4\,002}{1\,000 \times 1\,002 - 999 \times 1\,001}$.


 **Exercice 97.** Mettre sous la forme d'une seule fraction, qu'on écrira sous la forme la plus simple possible.

1. $A = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2. $B = \frac{a^3 - b^3}{(a - b)^2} - \frac{(a + b)^2}{a - b}$, pour a , b et c trois entiers distincts deux à deux. On pourra utiliser

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

3. $C = \frac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}$ pour $n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1, 2\}$.


Exercice 98. Dans chaque cas, simplifier au maximum l'expression en fonction du réel x . 

1. $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x^2-1}$;


2. $\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-2} + \frac{8}{x^2-4}$;


3. $\frac{x^2}{x^2-x} + \frac{x^3}{x^3+x^2} - \frac{2x^2}{x^3-x}$;


4. $\frac{1}{x} + \frac{x+2}{x^2-4} + \frac{2}{x^2-2x}$.

Exercice 99. En utilisant la formule $1 + 2 + \dots + p = \frac{p(p+1)}{2}$, simplifier pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, 


$$A_n = \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n^2}{1 + 2 + 3 + \dots + n}$$

Exercice 100. On vend successivement $\frac{1}{3}$, puis $\frac{2}{9}$ puis $\frac{1}{5}$ de la contenance en litre d'une barrique de vin. Le reste est vendu 1,5 € le litre ; le prix de vente de ce reste est 66 €. Quelle est la contenance de la barrique. 

Exercice 101. Trois personnes héritent d'une certaine somme d'argent. La première personne touche trois onzième du total. Les autres se partagent le reste de l'héritage, à savoir 32 000 €. Le deuxième héritier dépense deux septième de sa part et le troisième quatre neuvième de la sienne ; il reste alors à ces deux dernières personnes des sommes égales. Quel est le montant de l'héritage et quelle est la part de chacun des trois héritiers (en euros). 

Exercice 102. Une montre retarde d'un quart de minute pendant le jour mais par suite du changement de température, elle avance d'un tiers de minute pendant la nuit. On la règle aujourd'hui à midi ; dans combien de jours aura-t-elle une avance de deux minutes ? On admettra que le jour et la nuit ont chacun une durée de douze heures. 

11.2 Puissances


Exercice 103. Dans chaque cas, simplifier au maximum. 

1. $\frac{8^{17} \cdot 6^{-6}}{9^{-3} \cdot 2^{42}}$;

2. $\frac{55^2 \cdot 121^{-2} \cdot 125^2}{275 \cdot 605^{-2} \cdot 25^4}$;

3. $\frac{12^{-2} \cdot 15^4}{25^2 \cdot 18^{-4}}$;

4. $\frac{36^3 \cdot 70^5 \cdot 10^2}{14^3 \cdot 28^2 \cdot 15^6}$.

Exercice 104. Soit n un entier et a , b deux réels non nuls. Trouver une écriture plus simples des nombres suivantes. 

1. $A = \frac{(ab)^2 b}{a^{3-n}}$;

2. $B = \frac{2a^3 + 6(ab)^2}{(2a)^2 b}$.



Exercice 105. Remplacer chaque ? des identités suivantes par un rationnel explicite de telle sorte que les égalités soient vraies pour tout réel x appartenant à l'ensemble précisé. Les rationnels placés n'ont pas à être égaux et peuvent être négatifs.

1. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $(2x + 3)^3 = ? \times (x + ?)^3$.
2. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $(2x + 3)^3 = ? \times (1 + ? \times x)^3$.
3. Pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, $(2x + 3)^4 = x^? \times \left(2 + \frac{3}{x}\right)^4$.

11.3 Racines carrées



Exercice 106. Simplifier les expressions suivantes (on pourra commencer par les élever au carré) :

1. $\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}}$;
2. $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$.



Exercice 107. Exprimer la quantité suivante sans racine carrée au dénominateur.

$$A = \frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}$$



Exercice 108. Donner une écriture simplifiée des réels suivants.

1. $\frac{3 - \sqrt{5}}{2 + \sqrt{5}}$;
2. $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$;
3. $\sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}}$;
4. $3e^{-\frac{1}{2} \ln 3}$;
5. $2\sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}$;
6. $\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \right)$.



Exercice 109. On considère la fonction f qui à $x > 1$ associe $f(x) = \sqrt{x - 1}$. Pour tout $x > 1$, calculer et simplifier les expressions suivantes.

1. $f(x) + \frac{1}{f(x)}$;
2. $\frac{f(x + 2) - f(x)}{f(x + 2) + f(x)}$;
3. $\sqrt{x + 2f(x)}$;
4. $\frac{f'(x)}{f(x)}$;
5. $f(x) + 4f''(x)$;
6. $\frac{f(x)}{f''(x)}$.

11.4 Développement et factorisation



Exercice 110. Soit n un entier naturel. On pose $p = n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$.

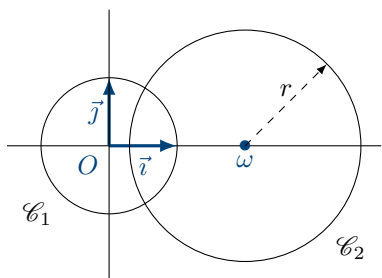
1. Factoriser $n(n + 3) + 2$.
2. On pose $q = (n + 1)(n + 2)$. Exprimer p en fonction de q ; la lettre n ne doit plus apparaître.
3. Montrer que $p + 1$ est le carré d'un entier naturel.



Exercice 111. Montrer que pour tous entiers relatifs a , b et c , le triplet $(c(a^2 - b^2), 2abc, c(a^2 + b^2))$ est une solution de l'équation $x^2 + y^2 = z^2$ d'inconnue (x, y, z) .



Exercice 112.



Soit d un réel strictement positif et r un réel supérieur ou égal à 1. On travaille dans un plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . On considère le cercle \mathcal{C}_1 de centre O et de rayon 1 et le cercle \mathcal{C}_2 de centre le point ω de coordonnées $(d, 0)$ et de rayon r . Une étude géométrique assure que \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 ont au moins un point commun si et seulement s'il existe $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ tel que $x^2 + y^2 = 1$ et $(x - d)^2 + y^2 = r^2$. Or pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (x - d)^2 + y^2 = r^2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2dx = d^2 - r^2 + 1 \\ 4d^2y^2 = 4d^2 - (d^2 - r^2 + 1)^2 \end{cases}$$

Finalement, les cercles \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 ont au moins un point commun si et seulement si $4d^2 - (d^2 - r^2 + 1)^2 \geq 0$.

1. Factoriser l'expression $4d^2 - (d^2 - r^2 + 1)^2$.
2. Montrer que les cercles considérés ont au moins un point d'intersection si et seulement si

$$r - 1 \leq d \leq r + 1.$$

Exercice 113. Soit x et y deux réels. Factoriser les expressions suivantes.



1. $A_1 = x^4 + 18x^2 + 81$.
2. $A_2 = (2x - 3)^2 - (x + 7)^2$.
3. $A_3 = x^2 + 1 - (x - 1)(2x + 3) - 2x$.
4. $A_4 = (4x^2 - 25)(x + 2) - (x^2 - 4)(2x + 5) + (5x + 10)(2x + 5)$.

Exercice 114. Soit a, b, c, x et y cinq réels tels que les expressions suivantes soient bien définies (autrement dit, tels qu'il n'y ait pas de division par zéro). Simplifier les expressions suivantes.



- | | | |
|--|---|--|
| 1. $\frac{25x^5y^3}{15x^3y}$; | 2. $\frac{64a^4b^2c^3}{48a^2b^3c}$; | 3. $\frac{b - ab}{a - a^2}$; |
| 4. $\frac{a^2x^3y - ay^2 + a^2xy}{ax^2y}$; | 5. $\frac{bx - by}{ax - ay}$; | 6. $\frac{2a + 2b + 2c}{5a + 5b + 5c}$; |
| 7. $\frac{3x^2 - 6x}{2x^2 - 8}$; | 8. $\frac{2x - 6}{x^2 - 9}$; | 9. $\frac{8x - 6x^2}{4x^2 + 10x}$; |
| 10. $\frac{9x + 3}{9x^2 + 6x + 1}$; | 11. $\frac{16x^2 - 24x + 9}{16x^2 - 9}$; | 12. $\frac{16x^2 + 24x + 9}{12x + 9}$; |
| 13. $\frac{2x + 5}{4x^2 + 20x + 25}$; | 14. $\frac{(x + 7)^2 - x - 7}{x + 6}$; | 15. $\frac{(5x - 3)^2 - 4(2 - x)^2}{14x - 14}$; |
| 16. $\frac{(3x - 12)(1 - x^2)}{(2x - 8)(x + 1)^2}$; | 17. $\frac{(x + 3)^2 - (5x - 4)^2}{36x^2 - 1}$; | 18. $\frac{9 + 12x + 4x^2}{2x + 3}$; |
| 19. $\frac{4x^2 - 1 - 2(2x - 1)^2}{2x - 1}$; | 20. $\frac{x^2 - 10x + 9}{(x - 1)^2 - (1 - x)(3 - 2x)}$. | |

Exercice 115. Soit n un entier naturel. On pose $p = n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$.



1. Factoriser $n(n + 3) + 2$.
2. On pose $q = (n + 1)(n + 2)$. Exprimer p en fonction de q (la lettre n ne doit plus apparaître).
3. Montrer que $p + 1$ est le carré d'un entier naturel.

11.5 Résolution d'équations



Exercice 116. Résoudre les équations ou inéquations suivantes d'inconnue x réelle.

1. $\ln(x^2 - 3) = -8$.
2. $e^{2x} - e^{x^2} = 0$.
3. $\ln(x) + \ln(x - 1) = \ln(2) + 2\ln(3)$.
4. $\ln(\ln x) > 0$.



Exercice 117. On cherche à résoudre l'équation

$$x^4 + 8x^3 + 2x^2 + 8x + 1 = 0$$

d'inconnue x réelle.

1. Soit $x \neq 0$. Justifier que

$$x^4 + 8x^3 + 2x^2 + 8x + 1 \iff x^2 + 8x + 2 + \frac{8}{x} + \frac{1}{x^2} = 0.$$

2. Soit $x \neq 0$. On pose $u = x + \frac{1}{x}$. Développer u^2 en fonction de x .
3. Résoudre l'équation $x^4 + 8x^3 + 2x^2 + 8x + 1 = 0$, d'inconnue x réelle.

11.6 Exponentielle et logarithme



Exercice 118. En admettant que toutes les quantités sont bien définies, déterminer parmi les assertions suivantes, celles qui sont vraies et celles qui sont fausses et corriger celles qui sont fausses.

1. Pour tous a, b réels, $e^{a \times b} = e^a \times e^b$.
2. Pour tous a, b réels, $e^a + e^b = e^{a+b}$.
3. $\ln x$ existe si et seulement si $x \geq 0$.
4. Pour tous a, b réels strictement positifs, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.
5. Pour tous a, b réels, $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$.
6. Pour tous a, b réels, $b \exp(a) = \exp(a^b)$.
7. Pour tous a, b réels strictement positifs, $\ln(a + b) = \ln a + \ln b$.



Exercice 119. Démontrer les égalités suivantes, pour tout $x \in \mathbf{R}$.

1. $\frac{e^x - 1}{e^x} = 1 - e^{-x}$;
2. $\frac{1}{e^x + 1} = \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 1}$;
3. $(e^x + e^{-x})(e^{2x})^2 = e^{3x}(e^{2x} + 1)$.



Exercice 120. Eva possède 1 000 € sur son compte. Chaque mois, elle prélève 5 % de la somme qu'il lui reste. Au bout de combien de mois lui restera-t-il moins de 500 € sur son compte ? (*on ne cherchera pas à expliciter l'entier solution*).



Exercice 121. Pour tout réel x , on pose $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

1. Montrer que, pour tout réel x , $f(x)^2 - g(x)^2 = 1$.
2. Montrer que, pour tout réel x , $f(2x) = 2f(x)^2 - 1$.
3. Montrer que, pour tout réel x , $g(2x) = 2f(x)g(x)$.

11.7 Dérivation

Exercice 122. On considère la fonction h définie pour tout $x \in \mathbf{R}$ par



$$h(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $h(-x) = h(x)$.
2. Déterminer l'expression de la dérivée de h .
3. Montrer que la fonction h vérifie $h' = 1 - h^2$.

11.8 Variations d'une fonction

Exercice 123. On considère la fonction f définie par



$$f(x) = \frac{3x^2 - 2x - 2}{2x^2 + x + 1}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f , qu'on notera D dans la suite.
2. Déterminer les limites de f aux extrémités de D . Interpréter graphiquement les limites obtenues.
3. Donner le tableau de variations complet de f .
4. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \frac{7}{4}$ sur \mathbf{R} .

Exercice 124. On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}(-5x^2 - 5x - 1) + \frac{1}{2}$ définie sur \mathbf{R}_+ .



1. Déterminer l'expression de la fonction dérivée f' .
2. (a) Montrer que $-3 + \sqrt{5} < 0$ et $-3 - \sqrt{5} < 0$.
(b) Dresser le tableau de variations complet de la fonction f .

Exercice 125. Déterminer les tableaux de variations complets des fonctions suivantes :



1. $f(x) = \frac{1}{x^5 + 1}$;
2. $g(x) = \frac{5x - 2}{3x + 1}$;
3. $h(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{2x + 1}$.

11.9 Établir une inégalité

Exercice 126. 1. Démontrer que, pour tout $x > 0$



$$\ln(x) \leq x - 1$$

2. En déduire que, pour tout $x > 0$,

$$\frac{1}{2} \ln(x) \leq \sqrt{x} - 1.$$

3. Montrer que, pour tout $x > 1$,

$$0 < \frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{2(\sqrt{x} - 1)}{x}.$$

4. En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

Exercice 127. Pour la dernière question de cette exercice, il faut se rappeler du théorème d'encadrement (aussi appelé théorème des gendarmes) et du calcul de limites.



1. Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$\ln(1+x) - x \leq 0.$$

2. Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \geq 0.$$

3. En déduire que, pour tout $x > 0$,

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

4. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x}$.



Exercice 128. Montrer que, pour tout $x \geq -3$,

$$(1+x)^3 \geq 1+3x.$$



Exercice 129. Soit x un réel appartenant à $[1; 3]$. On pose $A = \frac{4x+1}{2x+1}$. L'objectif de cet exercice est d'encadrer le plus précisément possible le réel A . Dans la première question, on utilise l'expression initiale de A . Dans la seconde question, on transforme l'expression de A puis on obtient un autre encadrement, meilleur, de A .

1. Préciser successivement un encadrement de $4x+1$, de $2x+1$ puis de A .
2. Écrire A sous la forme $A = ? + \frac{?}{2x+1}$, où chaque ? désigne un rationnel explicitement connu. Déterminer alors un nouvel encadrement de A .



Exercice 130. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right).$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f .
2. On introduit, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$h(x) = (x-1)e^x + 1.$$

En étudiant la fonction h , déterminer son signe.

3. En déduire les variations de f .
4. Montrer que, pour tout $x \in D$, $f(x) - x = f(-x)$. En déduire le signe de $f(x) - x$.
Indication : on rappelle que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $e^x \geq x+1$.

12.1 Fractions

Éléments de correction - Exercice 1

1. Il faut commencer par mettre les fractions au même dénominateur. Attention, le « meilleur » dénominateur n'est pas toujours le produit des dénominateurs des fractions. Ici, il faut par exemple éviter de choisir 5×25 comme dénominateur commun (car les calculs deviennent rapidement compliqués!).

$$\text{On a } A = \frac{4}{5} + \frac{3}{25} = \frac{4 \times 5}{5 \times 5} + \frac{3}{25} = \frac{20}{25} + \frac{3}{25} = \frac{23}{25}.$$

$$2. B = \frac{2}{3} + \frac{3}{3} = \frac{5}{3}.$$

$$3. C = \frac{5 \times 2}{24} + \frac{11}{24} = \frac{10}{24} + \frac{11}{24} = \frac{21}{24} = \frac{3 \times 7}{3 \times 8} = \frac{7}{8}.$$

4. Pour ajouter plus de deux fractions, on procède de manière similaire et on commence par mettre les fractions au même dénominateur.

$$D = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{2 \times 3}{2 \times 2 \times 3} + \frac{2 \times 2}{2 \times 2 \times 3} + \frac{3}{2 \times 2 \times 3} = \frac{6}{12} + \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{13}{12}.$$

5. Quand on a des parenthèses, il faut respecter les priorités calculatoires. Ici, les parenthèses sont inutiles car nous n'avons que des sommes à effectuer, mais si elles apparaissent c'est peut-être pour nous guider dans les calculs.

$$E = \left(\frac{2}{5} + \frac{10}{5}\right) + \left(\frac{2}{15} + \frac{45}{15}\right) + \frac{3}{10} = \frac{12}{5} + \frac{47}{15} + \frac{3}{10} = \frac{72 + 94 + 9}{30} = \frac{175}{30} = \frac{35}{6}.$$

$$6. F = \frac{a + 3a + 6a}{5} = \frac{10a}{5} = 2a.$$

$$7. G = \frac{11a + 5a + 33a + 6a}{11} = \frac{55a}{11} = 5a.$$

Éléments de correction - Exercice 2

$$1. A = \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = \frac{1}{6}.$$

2. Avant de se lancer dans des calculs compliqués, il peut être utile de voir si les fractions peuvent se simplifier!

$$B = \frac{15}{30} - \frac{3}{12} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}.$$

3. Le « meilleur » dénominateur commun est le plus petit commun multiple des dénominateurs. Pour le déterminer, on peut commencer par décomposer les dénominateurs en facteurs premiers : $12 = 2 \times 2 \times 3$ et $18 = 2 \times 3 \times 3$. On constate alors que le plus petit commun multiple à ces deux nombres est $2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$.

$$C = \frac{5 \times 3}{12 \times 3} - \frac{7 \times 2}{18 \times 2} = \frac{15-14}{36} = \frac{1}{36}.$$

$$4. D = \frac{4 \times 4 - 11}{100} = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}.$$

$$5. E = \frac{7 \times 15 - 13}{15} = \frac{92}{15}.$$

$$6. F = 3 - \frac{3}{4} = \frac{3 \times 4 - 3}{4} = \frac{9}{4}.$$

$$7. G = \frac{25 - 3 \times 6}{6} = \frac{7}{6}.$$

Éléments de correction - Exercice 3

$$1. A = \frac{3}{9} + \frac{1}{2} + \frac{5}{6} = \frac{3 \times 2 + 9 + 5 \times 3}{18} = \frac{30}{18} = \frac{5}{3}.$$

$$2. B = \frac{2}{5} + \frac{3}{4} + \frac{5}{9} = \frac{2 \times 36 + 3 \times 45 + 5 \times 20}{180} = \frac{307}{180}.$$

3. Attention à bien distribuer le signe dans une parenthèse !

$$C = \frac{60}{30} - \frac{14}{30} + \frac{3}{30} = \frac{49}{30}.$$

4. On commence par réorganiser les termes pour faciliter le calcul.

$$D = 5 - 3 + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} + \frac{7}{9} - \frac{5}{6} = 2 + \frac{2}{4} + \frac{14 - 15}{18} = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{18} = \frac{36 + 9 - 1}{18} = \frac{44}{18} = \frac{22}{9}.$$

$$5. E = \frac{9a - 2a}{7} = \frac{7a}{7} = a.$$

$$6. F = \frac{11a - 5a}{5} = \frac{6a}{5}.$$

Notons que l'énoncé est un peu imprécis ici : pour être certain que la fraction soit irréductible, il faut que $6a$ ne soit pas divisible par 5 (ce qui revient à dire que a ne doit pas être divisible par 5).

$$7. G = \frac{20a - 2a + 9a}{30b} = \frac{27a}{30b} = \frac{9a}{10b}.$$

Notons que l'énoncé est un peu imprécis ici : pour être certain que la fraction soit irréductible, il faut que $9a$ et $10b$ n'aient pas de multiples communs !

Éléments de correction - Exercice 4

$$1. A = \frac{13}{5} \times 5 = 13.$$

$$2. B = \frac{2}{3} \times \frac{9}{4} = \frac{2 \times 9}{3 \times 4} = \frac{2 \times 3 \times 3}{3 \times 2 \times 2} = \frac{3}{2}. \text{ Notons qu'ici on n'a pas fait directement les produits } 2 \times 9 \text{ et } 3 \times 4, \text{ on a d'abord cherché à simplifier les fractions (ce qui facilite beaucoup les calculs !).}$$

$$3. C = \frac{21}{5} \times \frac{15}{7} = \frac{3 \times 7 \times 3 \times 5}{5 \times 7} = 3 \times 3 = 9.$$

$$4. D = \frac{12}{20} \times \frac{35}{9} = \frac{3 \times 4 \times 7 \times 5}{4 \times 5 \times 3 \times 3} = \frac{7}{3}.$$

$$5. E = 5 \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \right) = 5 \times \frac{2}{3} + 5 \times \frac{1}{4} + 3 = \frac{5 \times 2 \times 4}{3 \times 4} + \frac{5 \times 3}{3 \times 4} + \frac{3 \times 3 \times 4}{3 \times 4} = \frac{40 + 15 + 36}{12} = \frac{91}{12}.$$

$$6. F = 6 \cdot \left(\frac{4}{5} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{6 \times 4}{5} + \frac{6 \times 2}{3} + \frac{6}{2} = \frac{24}{5} + 4 + 3 = \frac{24}{5} + \frac{4 \times 5}{5} + \frac{3 \times 5}{5} = \frac{24 + 20 + 15}{5} = \frac{59}{5}.$$

$$7. G = 3 \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3} \right) = \frac{3 \times 3}{4} - 2 = \frac{9 - 2 \times 4}{4} = \frac{1}{4}.$$

$$8. H = \left(4 - \frac{3}{5} \right) \left(1 - \frac{2}{3} \right) = \frac{5 \times 5 - 3}{5} \times \frac{3 - 2}{3} = \frac{17}{15}.$$

$$9. I = \left(1 + \frac{b}{a} \right) \left(1 - \frac{a}{b} \right) = \frac{b+a}{a} \times \frac{b-a}{b} = \frac{(a+b)(b-a)}{ab} = \frac{b^2 - a^2}{ab}.$$

Éléments de correction - Exercice 5

$$1. A = \frac{5 + \frac{1}{4}}{7} = \frac{1}{7} \left(5 + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{7} \times \frac{5 \times 4 + 1}{4} = \frac{21}{7 \times 4} = \frac{3 \times 7}{4 \times 7} = \frac{3}{4}.$$

Il faut être vigilant quand on place le symbole « + », qui doit être au même niveau que la barre de fraction principale. En effet, en règle générale, $\frac{a}{b} \neq \frac{a}{\frac{b}{c}}$ (essayez de faire le calcul pour $a = 1$,

$b = 2$ et $c = 3$ par exemple ; $\frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$ tandis que $\frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{6}$).

$$2. B = \frac{8 + \frac{3}{4}}{5} = \frac{1}{5} \times \frac{8 \times 4 + 3}{4} = \frac{35}{5 \times 4} = \frac{7 \times 5}{5 \times 4} = \frac{7}{4}.$$

3. $C = \frac{5 + \frac{6}{9}}{17} = \frac{1}{17} \times \frac{5 \times 9 + 6}{9} = \frac{51}{17 \times 9} = \frac{17 \times 3}{17 \times 3 \times 3} = \frac{1}{3}$.
4. $D = \frac{7 + \frac{2}{3}}{\frac{1}{9}} = 9 \times \left(7 + \frac{2}{3}\right) = 9 \times 7 + 9 \times \frac{2}{3} = 63 + 6 = 69$.
5. $E = \frac{3 + \frac{7}{9}}{\frac{3}{8}} = \frac{8}{3} \times \left(3 + \frac{7}{9}\right) = 8 + \frac{8 \times 7}{3 \times 9} = \frac{8 \times 27 + 56}{27} = \frac{216 + 56}{27} = \frac{272}{27}$.
6. $F = \frac{4 + \frac{1}{4}}{\frac{3}{8}} = \frac{8}{3} \times \left(4 + \frac{1}{4}\right) = \frac{8}{3} \times \frac{4 \times 4 + 1}{4} = \frac{8 \times 17}{3 \times 4} = \frac{4 \times 2 \times 17}{3 \times 4} = \frac{34}{3}$.
7. $G = 6 \times \left(3 + \frac{4}{9}\right) = 18 + \frac{6 \times 4}{9} = 18 + \frac{3 \times 2 \times 4}{9} = 18 + \frac{8}{3} = \frac{3 \times 18 + 8}{3} = \frac{62}{3}$.

Éléments de correction - Exercice 6

1. $A = \frac{1}{1 + \frac{1}{a}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{(1 + \frac{1}{a}) \cdot a}{a + 1} \cdot \frac{1}{a}$.
2. $B = \frac{\frac{5}{2}}{10 + \frac{5}{2}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{2 \times 10 + 5}{2}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{25}{2}} = \frac{5}{2} \times \frac{2}{25} = \frac{5 \times 2}{2 \times 5 \times 5} = \frac{1}{5}$.
Attention, $\frac{5}{2}$ qui apparaît au numérateur et au dénominateur ne peut pas être simplifié, car on a des somme et pas des produits.
3. $C = \frac{a}{\frac{ab+3b^2}{2}} \cdot \frac{b}{2a} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{a \times b}{(ab + 3b^2) \times 2a} = \frac{2 \times a \times b}{2 \times a \times b \times (a + 3b)} = \frac{1}{a + 3b}$.
4. $D = \frac{1}{\frac{8}{75} - \frac{5}{12}} = \frac{1}{\frac{8}{3 \times 25} - \frac{5}{3 \times 4}} = \frac{1}{\frac{8 \times 4 - 5 \times 25}{3 \times 4 \times 25}} = \frac{1}{\frac{32 - 125}{300}} = \frac{1}{\frac{-93}{300}} = -\frac{300}{93} = -\frac{100}{31}$.

Éléments de correction - Exercice 7

1. $\frac{3}{5} = \frac{27}{45} > \frac{25}{45} = \frac{5}{9}$.
2. Avec les produits en croix : $12 \times 12 > 10 \times 11$, donc $\frac{12}{11} > \frac{10}{12}$. Ou plus simplement, on voit sans calcul que $\frac{12}{11} > 1$ et que $\frac{10}{12} < 1$, ce qui permet de retrouver la relation de comparaison.
3. $\frac{125}{25} = 5 = \frac{105}{21}$.

Éléments de correction - Exercice 8

On sait que $A = B$ si et seulement si $33\,125 \times 208\,341 = 66\,317 \times 104\,348$. Le nombre de gauche est le produit de deux nombres impairs, il est donc impair. Par contre, le nombre de droite est le produit de deux nombres de parités différentes, il est donc pair. Par conséquent, l'égalité n'est pas vérifiée : A et B ne sont pas égaux.

Éléments de correction - Exercice 9

On a $A = \frac{10^5 + 1}{10^6 + 1}$ et $B = \frac{10^6 + 1}{10^7 + 1}$. On utilise les produits en croix :

$$(10^5 + 1) \times (10^7 + 1) = 10^{12} + 10^7 + 10^5 + 1 \quad \text{et} \quad (10^6 + 1)^2 = 10^{12} + 2 \times 10^6 + 1.$$

Ainsi on a $(10^5 + 1) \times (10^7 + 1) > (10^6 + 1)^2$, d'où $A > B$.

12.2 Puissances

Éléments de correction - Exercice 10

1. $A^1 = A^2 = A^3 = A^4 = 1$.
2. $B^1 = (-1)^1 = -1$, $B^2 = (-1)^2 = 1$, $B^3 = (-1)^3 = -1$ et $B^4 = (-1)^4 = 1$.
3. $C^1 = 2^1 = 2$, $C^2 = 2^2 = 4$, $C^3 = 2^3 = 8$ et $C^4 = 2^4 = 16$.
4. $D^1 = (-2)^1 = -2$, $D^2 = (-2)^2 = 4$, $D^3 = (-2)^3 = -8$ et $D^4 = (-2)^2 = 16$.
5. $E^1 = 3^1 = 3$, $E^2 = 3^2 = 9$, $E^3 = 3^3 = 27$ et $E^4 = 3^4 = 81$.
6. $F^1 = (-3)^1 = -3$, $F^2 = (-3)^2 = 9$, $F^3 = (-3)^3 = -27$ et $F^4 = (-3)^4 = 81$.

Éléments de correction - Exercice 11

1. $(-2)^3 2^2 = -8 \times 4 = -32$.
2. $(-5)^2(-5) = -125$.
3. $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{-2}{3}\right)^3 = \frac{4}{9} \left(-\frac{8}{27}\right) = -\frac{32}{243}$.
4. $\frac{3}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^3} = \frac{27}{64}$.
5. $\frac{3^2}{5^2} \left(\frac{2}{9}\right)^2 = \frac{3^2 \times 2^2}{5^2 \times 3^2} = \frac{5 \times 4}{25 \times 9^2} = \frac{4}{225}$.
6. $\left(-\frac{2}{3}\right)^4 \left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{2^{14} \times 5}{3 \times 2} = \frac{40}{3}$.
7. $a^2 \cdot a^4 = a^6$.
8. $a^4 \cdot a^3 = a^7$.
9. $a^5 \cdot a = a^6$.
10. $-a^3(-a)^5 = -a^3(-1)^5 a^5 = a^3 a^5 = a^8$.
11. $(2^2)^3 = 2^6 = 64$.
12. $((-3)^2)^3 = (3^2)^3 = 3^6 = 729$.
13. $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^3 = \left(\frac{1}{2^2}\right)^3 = \frac{1}{(2^2)^3} = \frac{1}{64}$.
14. $\left(\left(-\frac{2}{5}\right)^3\right)^2 = \left((-1)^3 \left(\frac{2}{5}\right)^3\right)^2 = \left(-\frac{2^3}{5^3}\right)^2 = (-1)^2 \frac{2^6}{5^6} = \frac{64}{15\,625}$.
15. $\left(\left(-\frac{3}{2}\right)^2\right)^3 = \frac{3^6}{2^6} = \frac{729}{64}$.
16. $\left(-\left(\frac{5}{2}\right)^2\right)^3 = (-1)^3 \frac{5^6}{2^6} = -\frac{15\,625}{64}$.
17. $\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^3\right)^3 = -\frac{1}{3^9} = -\frac{1}{19\,683}$.
18. $((-3)^3 \cdot 5^2)^2 = 3^6 5^4 = 455\,625$.
19. *Quand on a des fractions avec des puissances, il faut déjà chercher à simplifier les puissances avant de les calculer.*
 $\left(3^3 \left(-\frac{1}{6}\right)^2\right)^2 = \left(\frac{3^3}{(2 \times 3)^2}\right)^2 = \left(\frac{3^3}{2^2 \cdot 3^2}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$.
20. $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(-\frac{3}{4}\right)^2\right)^2 = \left(\frac{2^3 \cdot 3^2}{3^3 \cdot 2^4}\right)^4 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$.
21. $\left((-2) \cdot 10^3 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^4\right)^2 = \left(-2 \cdot 2^3 \cdot 5^3 \cdot \frac{1}{5^4}\right)^2 = \left(\frac{16}{5}\right)^2 = \frac{256}{25}$.

$$22. \left(-27 \left(\frac{2}{3} \right)^3 \left(-\frac{1}{2} \right)^2 \right)^2 = \left(-3^3 \frac{2^3}{3^3} \frac{1}{2^2} \right)^2 = 4.$$

Éléments de correction - Exercice 12

1. $\frac{(-a)^5}{a^3} = \frac{(-1)^5 a^5}{a^3} = -a^2.$
2. $\frac{(-a)^6}{(-a)^3} = (-a)^3 = -a^3.$
3. $\frac{(-a)^9}{-a} = (-a)^8 = a^8.$
4. $\frac{(-a)^{2022}}{a} = \frac{a^{2022}}{a} = a^{2021}.$
5. $a^3 \cdot a^{-5} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}.$
6. $a^{-2} \cdot a^{-3} = a^{-5} = \frac{1}{a^5}.$
7. $a^{-2} \cdot a^4 = a^2.$
8. $a^2 a^{-1} = a.$
9. $\frac{a^3}{a^{-5}} = a^3 \cdot a^5 = a^8.$
10. $\frac{a^{-4}}{a^{-2}} = a^{-4} a^2 = a^{-2} = \frac{1}{a^2}.$
11. $\frac{a^4}{a^{-3}} = a^4 a^3 = a^7.$
12. $\frac{a^{-3}}{a^{-4}} = a^{-3} a^4 = a.$

Éléments de correction - Exercice 13

1. $\frac{1}{(-2)^{-1}} = -2.$
2. $-\frac{1}{5^{-1}} = -5.$
3. $-\frac{1}{6^{-3}} = -6^3 = -216.$
4. $\frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}.$
5. $(-1)^3 2^{-2} 3^3 = -\frac{27}{4}.$
6. $(-3)^{-1} \cdot 6^2 \cdot 4^{-1} = -\frac{1}{3} (3^2 \times 2^2) \frac{1}{2^4} = -\frac{3}{4}.$
7. $10^{-5} \cdot 10^3 = 10^{-2} = \frac{1}{100}.$
8. $\left(\frac{3}{2} \right)^{-1} (-1)^2 \left(\frac{3}{4} \right)^3 = \frac{2}{3} \frac{3^3}{2^6} = \frac{3^2}{2^5} = \frac{9}{32}.$
9. $\left(-\frac{5}{2} \right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{-2} \left(-\frac{1}{5} \right)^{-1} = \frac{5^2 \cdot 3^2 \cdot 5}{2^2 \cdot 2^2} = -\frac{1\ 125}{16}.$
10. $\left(\frac{4}{7} \right)^3 \left(-\frac{2}{3} \right)^3 \left(-\frac{3}{7} \right)^{-3} = \frac{4^3 \cdot 2^3 \cdot 7^6}{783^3 \cdot 3^3} = \frac{2^9}{3^9} = \frac{512}{19\ 683}.$
11. $\frac{25^3 \cdot 2^7 \cdot 3^5}{30^6} = \frac{(5^2)^3 \cdot 2^7 \cdot 3^5}{5^6 \cdot 2^6 \cdot 3^6} = \frac{5^6 \cdot 2^7 \cdot 3^5}{5^6 \cdot 2^6 \cdot 3^6} = \frac{2}{3}.$
12. $\frac{9^{-2} \cdot 4^2}{3^{-3} \cdot 6^{-2}} = \frac{(3^2)^{-2} \cdot (2^2)^2}{3^{-3} \cdot 2^{-2} \cdot 3^{-2}} = \frac{3^{-6} \cdot 2^4}{3^{-5} \cdot 2^{-2}} = \frac{2^4 \cdot 2^6 \cdot 3^5}{3^6} = \frac{2^6}{3^6} = \frac{64}{729}.$

13. $\frac{49^{-2} \cdot 5^6 \cdot 2^3}{7^{-3} \cdot 125^3 \cdot 12} = \frac{(7^2)^{-2} \cdot 5^6 \cdot 2^3}{7^{-3} \cdot (5^{-3})^3 \cdot 2^2 \cdot 3} = \frac{7^{-4} \cdot 5^6 \cdot 2^3}{7^{-3} \cdot 5^3 \cdot 2^2 \cdot 3} = \frac{7^3 \cdot 5^6 \cdot 2^3}{7^4 \cdot 5^3 \cdot 2^2 \cdot 3} = \frac{2}{7 \cdot 5^3 \cdot 3} = \frac{2}{2\,625}$.
14. $\frac{4^2 \cdot (-12)^2}{(-2)^3 \cdot 6^{-2} \cdot 3^3} = \frac{2^4 \cdot 3^2 \cdot 4^2}{-2^3 \cdot 2^{-2} \cdot 3^{-2} \cdot 3^3} = -\frac{2^4 \cdot 3^2 \cdot 2^4}{2 \cdot 3} = -2^7 \cdot 3 = -384$.
15. $\frac{10^{-5} \cdot 25^3}{(-1)^{2022} \cdot 2^{-4}} = \frac{2^{-5} \cdot 5^{-5} \cdot 5^6}{2^{-4}} = \frac{5}{2}$.

Éléments de correction - Exercice 14

1. $\frac{4^3}{2^8} = \frac{(2^2)^3}{2^8} = \frac{2^6}{2^8} = \frac{1}{4}$.
2. $\frac{25^3}{(-5)^6} = \frac{(5^2)^3}{(-1)^6 \cdot 5^6} = \frac{5^6}{5^6} = 1$.
3. $\frac{9^{-1}}{3^{-2}} = \frac{3^2}{9} = 1$.
4. $\frac{4^{65}}{2^{128}} = \frac{(2^2)^{65}}{2^{128}} = \frac{2^{130}}{2^{128}} = 2^{130-128} = 2^2 = 4$.
5. $\frac{8^{-5}}{64^{-3}} = \frac{(8^2)^3}{8^5} = \frac{8^6}{8^5} = 8$.
6. $\frac{12^{-4} \cdot 027}{164^{-2} \cdot 014} = \frac{(12^2)^2 \cdot 014}{12^4 \cdot 027} = \frac{12^4 \cdot 028}{12^4 \cdot 027} = 12$.
7. $\frac{2^{2n}}{4^n} = \frac{2^{2n}}{(2^2)^n} = \frac{2^{2n}}{2^{2n}} = 1$.
8. $\frac{3^{3n}}{(33)^{3n+1}} = \frac{3^{3n}}{3^{3n+3}} = \frac{1}{3^{3n+3-3n}} = \frac{1}{3^{6n+3}}$.
9. $\frac{125^{n+1}}{5^{3n-1}} = \frac{(5^3)^{n+1}}{5^{3n-1}} = 5^{3n+3-(3n-1)} = 5^4 = 625$.
10. $\frac{144^{n-1}}{12^{2(n+1)}} = \frac{144^{n-1}}{144^{n+1}} = \frac{1}{144^{n+1-n+1}} = \frac{1}{144^2} = \frac{1}{20\,736}$.

Éléments de correction - Exercice 15

1. $A = \frac{2}{15} + \frac{3}{10} = \frac{2}{3 \times 5} + \frac{3}{2 \times 5} = \frac{2 \times 2}{2 \times 3 \times 5} + \frac{3 \times 3}{2 \times 3 \times 5} = \frac{4+9}{30} = \frac{13}{30}$.
2. $B = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{2 \times 3} + \frac{2}{2 \times 3} = \frac{2+3}{6} = \frac{5}{6}$.
3. $C = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{3 \times 3}{3 \times 4} + \frac{2 \times 4}{2 \times 4} = \frac{9+8}{8} = \frac{17}{8}$.
4. $D = \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} = \frac{3}{3 \times 20} + \frac{2}{2 \times 30} + \frac{1}{42} = \frac{2+3}{60} + \frac{1}{42} = \frac{5}{60} + \frac{1}{42} = \frac{1}{12} + \frac{1}{42} = \frac{1}{2^2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 7} = \frac{1}{2^2 \times 3 \times 7} + \frac{1}{2^2 \times 3 \times 7} = \frac{2}{2^2 \times 3 \times 7} = \frac{1}{2 \times 3 \times 7} = \frac{1}{42}$.
5. $E = \left(\frac{4}{9} + 2\right) + \frac{2}{3} + \left(2 + \frac{1}{12}\right) = \frac{4+2 \times 9}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2 \times 12 + 1}{12} = \frac{22}{2} + \frac{2}{3} + \frac{25}{12} = \frac{22}{9} + \frac{2}{3} + \frac{25}{12} = \frac{22+3 \times 2}{9} + \frac{25}{12} = \frac{28}{9} + \frac{25}{12} = \frac{28 \times 4 + 25 \times 3}{36} = \frac{187}{36}$.
6. $F = 3a + \frac{4a}{7} + \frac{a}{14} = \frac{14 \times 3a + 2 \times 4a + a}{14} = \frac{51a}{14}$.
7. $G = \frac{3a}{2b} + \frac{a}{3b} + \frac{5a}{2b} + \frac{2a}{3b} = \frac{3 \times 3a + 2 \times a + 3 \times 5a + 2 \times 2a}{6b} = \frac{30a}{6b} = \frac{5a}{b}$.

Éléments de correction - Exercice 16

1. $A = \frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{3 \times 5}{4 \times 5} - \frac{2 \times 4}{4 \times 5} = \frac{15 - 8}{20} = \frac{7}{20}$.
2. $B = \frac{3 \times 6}{2 \times 6} - \frac{3 \times 5}{2 \times 5} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$. *Quand on peut simplifier des fractions, on le fait immédiatement !*
3. $C = \frac{17}{60} - \frac{17}{75} = \frac{17}{2^2 \times 3 \times 5} - \frac{17}{3 \times 5^2} = \frac{17 \times 5}{2^2 \times 3 \times 5^2} - \frac{17 \times 2^2}{2^2 \times 3 \times 5^2} = \frac{85 - 68}{300} = \frac{17}{300}$.
4. $D = 2 - \frac{11}{8} = \frac{2 \times 8}{8} - \frac{11}{8} = \frac{16 - 11}{8} = \frac{5}{8}$.
5. $E = \frac{52}{15} - 3 = \frac{52}{15} - \frac{3 \times 15}{15} = \frac{52 - 45}{15} = \frac{7}{15}$.
6. $F = 5 - \frac{17}{5} = \frac{5 \times 5 - 17}{5} = \frac{8}{5}$.
7. $G = \frac{13}{4} - 2 = \frac{13 - 2 \times 4}{4} = \frac{5}{4}$.

12.3 Racines carrées

Éléments de correction - Exercice 17

1. $\sqrt{1000} = \sqrt{10 \times 100} = \sqrt{100}\sqrt{10} = 10\sqrt{10}$.
2. $\sqrt{125} = \sqrt{25 \times 5} = 5\sqrt{5}$.
3. $\sqrt{27} \cdot \sqrt{9 \times 3} = 3\sqrt{3}$.
4. $\sqrt{30^{50}} = \sqrt{(30^{15})^2} = 30^{25}$.
5. $\sqrt{5}\sqrt{45} = \sqrt{5}\sqrt{9 \times 5} = 3(\sqrt{5})^2 = 15$.
6. $\sqrt{27^3} = \sqrt{(3^3)^3} = \sqrt{3^9} = \sqrt{3 \times 3^8} = 3^4\sqrt{3} = 81\sqrt{3}$.
7. $(\sqrt{8})^5 = (\sqrt{8})^2(\sqrt{8})^2\sqrt{8} = 64\sqrt{8} = 64\sqrt{4 \times 2} = 128\sqrt{2}$.
8. $\sqrt{8}\sqrt{162} = 2\sqrt{2}\sqrt{81 \times 2} = 2 \times 9\sqrt{2}\sqrt{2} = 72$.
9. $\sqrt{(-1)^4} = \sqrt{1} = 1$.
10. $\sqrt{(-2)^3(-18)} = \sqrt{2^3 \cdot 2 \cdot 9} = \sqrt{2^4 3^2} = 2^2 3 = 12$.
11. $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$.
12. $\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^5 \frac{27}{50}} = \sqrt{\frac{2^5 3^3}{3^5 5^2 2}} = \sqrt{\frac{2^4}{3^2 5^2}} = \frac{2^2}{3 \times 5} = \frac{4}{15}$.

Éléments de correction - Exercice 18

1. Puisqu'une racine carrée est toujours positive, $\sqrt{7} \geq 0$.
2. Puisqu'une racine carrée est toujours positive, $\sqrt{\sqrt{5}} \geq 0$.
3. On a $2 \leq 3$, donc par croissance de la fonction racine carrée, $\sqrt{2} \leq \sqrt{3}$ puis $\sqrt{2} - \sqrt{3} \leq 0$.
4. On a $2\ 022 \geq 2\ 021$ donc par croissance de la fonction racine carrée, $\sqrt{2\ 022} \geq \sqrt{2\ 021}$, puis $\sqrt{2\ 022} - \sqrt{2\ 021} \geq 0$.
5. $\sqrt{7} + \sqrt{2}$ est positif en tant que somme de nombres positifs.
6. On a $11 \geq 9$, donc par croissance de la fonction racine carrée, $\sqrt{11} \geq \sqrt{9}$, puis $\sqrt{11} \geq 3$. En particulier, $\sqrt{11} \geq 2$, puis $\sqrt{11} - 2 \geq 0$.
7. On a $5 \geq 4$, donc par croissance de la fonction racine carrée, $\sqrt{5} \geq \sqrt{4}$, puis $\sqrt{5} \geq 2$. Ainsi, $\sqrt{5} - 2 \geq 0$.
8. $2 + \sqrt{5}$ est positif en tant que somme de nombres positifs.

Éléments de correction - Exercice 19

1. $\sqrt{(-5)^2} = 5$.
2. $\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{3}-1$ car $\sqrt{3} \geq \sqrt{1} = 1$.
3. $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} = -(\sqrt{3}-2) = -\sqrt{3}+2$ car $\sqrt{3} \leq \sqrt{4} = 2$.
4. $\sqrt{(2-\sqrt{7})^2} = -(2-\sqrt{7}) = \sqrt{7}-2$ car $\sqrt{7} \geq \sqrt{4} = 2$.
5. $\sqrt{(3-\pi)^2} = \pi-3$ car $\pi \geq 3$.
6. $\sqrt{(3-a)^2} = |3-a|$, c'est-à-dire $3-a$ si $a \leq 3$ et $a-3$ si $a \geq 3$.

Éléments de correction - Exercice 20

1. $\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}} = \frac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = \frac{4-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2^2-\sqrt{2}^2} = \frac{4-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2} = 2-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\frac{\sqrt{6}}{2}$.
2. $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}^2-2\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}^2-1} = 3-2\sqrt{2}$.
3. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})} = \frac{2-\sqrt{6}+\sqrt{6}-3+\sqrt{10}-\sqrt{15}}{\sqrt{2}^2-\sqrt{3}^2} = 1-\sqrt{10}+\sqrt{15}$.
4. $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \sqrt{15}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-2$.
5. $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}^2-\sqrt{3}^2} = -(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.
6. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = -\frac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}$.
7. $\frac{5+2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{5-2\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = 2\sqrt{2}$.
8. $\left(\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\right)^2 = 50-25\sqrt{3}$.

Éléments de correction - Exercice 21

1. La méthode avec la forme conjuguée fonctionne ici, c'est la plus rapide pour montrer l'égalité demandée.

Il faut faire attention à la rédaction quand on veut montrer que $A = B$ (où A et B sont deux expressions réelles). On dispose essentiellement de trois méthodes.

(a) On commence avec A , qu'on transforme jusqu'à retomber sur B . Le schéma de rédaction est alors le suivant :

$$\begin{aligned} A &= \dots \\ &= \dots \\ &= B. \end{aligned}$$

(b) On commence avec B , qu'on transforme jusqu'à retomber sur A . Le schéma de rédaction est alors le suivant :

$$\begin{aligned} B &= \dots \\ &= \dots \\ &= A. \end{aligned}$$

(c) On simplifie le plus possible $A - B$ jusqu'à obtenir zéro. Le schéma de rédaction est alors le suivant :

$$\begin{aligned} A - B &= \dots \\ &= \dots \\ &= 0. \end{aligned}$$

On utilise la méthode (a). $2 - \sqrt{3} = \frac{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}{2 + \sqrt{3}} = \frac{4 - (\sqrt{3})^2}{2 + \sqrt{3}} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$.

2. On a $(\sqrt{3 + 2\sqrt{2}})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$ et $(1 + \sqrt{2})^2 = 1 + 2\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$. Donc $(\sqrt{3 + 2\sqrt{2}})^2 = (1 + \sqrt{2})^2$. Or $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} \geq 0$ et $1 + \sqrt{2} \geq 0$ donc

$$\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}.$$

3. On a $(\sqrt{5 - 2\sqrt{6}})^2 = 5 - 2\sqrt{6}$ et $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = 3 - 2\sqrt{3}\sqrt{2} + 2 = 5 - 2\sqrt{6}$, donc $(\sqrt{5 - 2\sqrt{6}})^2 = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$. Or $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} \geq 0$ et $\sqrt{3} - \sqrt{2} \geq 0$, donc $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$.

Éléments de correction - Exercice 22

- $A = \frac{3}{1000} \times 100 = \frac{3}{10}$.
- $B = \frac{3\pi}{4} \times \frac{6}{\pi} = \frac{3 \times \pi \times 2 \times 3}{2 \times 2 \times \pi} = \frac{9}{2}$.
- $C = \frac{121}{22} \times \frac{4}{55} = \frac{11 \times 11 \times 2 \times 2}{2 \times 11 \times 5 \times 11} = \frac{2}{5}$.
- $D = \frac{144}{125} \times \frac{75}{16} = \frac{2^4 \times 3^2 \times 3 \times 5^2}{5^3 \times 2^4} = \frac{3^3}{5} = \frac{27}{5}$. *Connaître par cœur les carrés des premiers entiers naturels est très utile. Par exemple, on a utilisé $11^2 = 121$ à la question précédente, et $12^2 = 144$ ici.*
- $E = 3 \cdot \left(\frac{6}{9} + \frac{1}{5} + \frac{2}{7} \right) = \frac{3 \times 6}{9} + \frac{3}{5} + \frac{3 \times 2}{7} = 2 + \frac{3}{5} + \frac{6}{7} = \frac{2 \times 5 + 3}{5} + \frac{6}{7} = \frac{13}{5} + \frac{6}{7} = \frac{13 \times 7 + 6 \times 5}{7 \times 5} = \frac{121}{35}$.
- $F = 7 \cdot \left(\frac{4}{14} + \frac{1}{3} + \frac{7}{9} \right) = \frac{7 \times 2 \times 2}{2 \times 7} + \frac{7}{3} + \frac{7 \times 7}{9} = 2 + \frac{7}{3} + \frac{49}{9} = \frac{2 \times 3 + 7}{3} + \frac{49}{9} = \frac{13}{3} + \frac{49}{9} = \frac{3 \times 13 + 49}{9} = \frac{88}{9}$.
- $G = \left(5 + \frac{3}{8} \right) \left(1 + \frac{5}{8} \right) = \frac{5 \times 8 + 3}{8} \times \frac{1 \times 8 + 5}{8} = \frac{43}{8} \times \frac{13}{8} = \frac{43 \times 13}{8^2} = \frac{559}{64}$.
- $H = \left(\frac{7}{15} - \frac{4}{30} \right) \cdot \left(6 + \frac{3}{4} \right) = \frac{7 \times 2 - 4}{30} \times \frac{6 \times 4 + 3}{4} = \frac{10}{30} \times \frac{27}{4} = \frac{1}{3} \times \frac{3 \times 9}{4} = \frac{9}{4}$.

Éléments de correction - Exercice 23

- $10^5 \cdot 10^3 = 10^{5+3} = 10^8$.
- $(10^5)^3 = 10^{5 \times 3} = 10^{15}$.
- $\frac{10^5}{10^3} = 10^{5-3} = 10^2$.
- $\frac{10^{-5}}{10^{-3}} = 10^{-5-(-3)} = 10^{-2}$.
- $\frac{(10^5 \cdot 10^{-3})^5}{(10^{-5} \cdot 10^3)^{-3}} = \frac{(10^2)^5}{(10^{-2})^{-3}} = \frac{10^{10}}{10^6} = 10^4$.
- $\frac{(10^3)^{-5} \cdot 10^5}{10^3 \cdot 10^{-5}} = \frac{10^{-15} \cdot 10^5}{10^{-2}} = \frac{10^{-10}}{10^{-2}} = 10^{-8}$.

12.4 Développement et factorisation

Éléments de correction - Exercice 24

1. $A = (x^2 - x)(x + 1) = x^2 \times x + x^2 \times 1 - x \times x - x \times 1 = x^3 + x^2 - x^2 - x = x^3 - x$.
Une fois l'expression développée, il reste à la réduire (ce qui revient à « mettre ensemble les termes en x^2 », puis les termes « en x », puis les termes constants. En général, on ordonne les puissances.
2. $B = (2x^2 + x - 4)(x + 2) = 2x^3 + 4x^2 + x^2 + 2x - 4x - 8 = 2x^3 + 4x^2 - 2x - 8$.
Les formules de distributivité se généralisent facilement. Ici, on a par exemple utilisé

$$(a + b + c) \times (d + e) = ad + ae + bd + be + cd + ce.$$

$$3. C = (2x^2 + 3 - 4x)(2x + 4) = 4x^3 + 8x^2 + 6x + 12 - 8x^2 - 16x = 4x^3 - 10x + 12.$$

$$\begin{aligned}
 4. D &= \left(4x^3 + 5x^2 - \frac{3}{2}x\right) \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) \\
 &= \frac{4x^4}{2} - \frac{4x^3}{4} + \frac{5x^3}{2} - \frac{5x^2}{4} - \frac{3x^2}{4} + \frac{3x}{8} \\
 &= 2x^4 + \left(-1 + \frac{5}{2}\right)x^3 + \left(-\frac{5}{4} - \frac{3}{4}\right)x^2 + \frac{3}{8}x \\
 &= 2x^4 + \frac{3}{2}x^3 - 2x^2 + \frac{3}{8}x.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5. E &= (x + 1)(x - 2)(x - 3) \\
 &= (x^2 - 2x + x - 2)(x - 3) \\
 &= (x^2 - x - 2)(x - 3) \\
 &= x^3 - 3x^2 - x^2 + 3x - 2x + 6 \\
 &= x^3 - 4x^2 + x + 6.
 \end{aligned}$$

Quand on a plus de deux produits, il faut les faire les uns à la suite des autres (en réduisant au fur et à mesure pour éviter de longs calculs). Par exemple ici, on a commencé par $(x + 1)(x - 2)$.

$$\begin{aligned}
 6. F &= (3x - 2)(2x + 3)(5 - x) \\
 &= ((6x^2 + 9x - 4x - 6)(5 - x)) \\
 &= (6x^2 + 5x - 6)(5 - x) \\
 &= 30x^2 + 25x - 30 - 6x^3 - 5x^2 + 6x \\
 &= -6x^3 + 25x^2 + 31x - 30.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7. G &= (x - a)(x + b)(x - c) \\
 &= (x^2 + bx - ax - ab)(x - c) \\
 &= (x^2 + (b - a)x - ab)(x - c) \\
 &= x^3 - cx^2 + (b - a)x^2 - (b - a)cx - abx + abc \\
 &= x^3 + (-a + b - c)x^2 + (-ab - bc + ac)x + abc.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8. H &= b(x + a - b) - a(x + b - a) - a^2 - b^2 \\
 &= bx + ab - b^2 - ax - ab + a^2 - a^2 - b^2 \\
 &= (b - a)x - 2b^2.
 \end{aligned}$$

9. Il faut être très prudent avec les parenthèses et les signes ici !

$$\begin{aligned}
 I &= (x - 1)(x - a + b) - (1 - x)(x + a - b) - 2(x + a - b)(x - a + b) \\
 &= (x^2 - ax + bx - x + a - b) - (x + a - b - x^2 - ax + bx) \\
 &\quad - 2(x^2 - ax + bx + ax - a^2 + ab - bx + ab - b^2) \\
 &= (x^2 + (-a + b - 1)x + a - b) - (-x^2 + (1 - a + b)x + a - b) - 2(x^2 - a^2 + ab - b^2) \\
 &= x^2 + (-a + b - 1)x + a - b + x^2 - (1 - a + b)x - a + b - 2x^2 + 2a^2 - 4ab + 2b^2 \\
 &= (-a + b - 1 - 1 + a - b)x + 2a^2 - 4ab + 2b^2 \\
 &= -2x + 2a^2 + 2b^2 - 4ab.
 \end{aligned}$$

Notons que si on est un peu plus observateur, on peut remarquer qu'il y a une factorisation par $(x - 1)$ à faire au début et on peut aussi repérer une identité remarquable de la forme $A^2 - B^2$,

ce qui simplifie grandement les calculs !

$$\begin{aligned}
 I &= (x-1)(x-a+b) - (1-x)(x+a-b) - 2(x+a-b)(x-a+b) \\
 &= (x-1)(x-a+b) + (x-1)(x+a-b) - 2(x+a-b)(x-(a-b)) \\
 &= (x-1)(x-a+b+x+a-b) - 2(x^2 - (a-b)^2) \\
 &= (x-1)2x - 2x^2 + 2(a-b)^2 \\
 &= 2x^2 - 2x - 2x^2 + 2a^2 - 4ab + 2b^2 \\
 &= -2x + 2a^2 - 4ab + 2b^2.
 \end{aligned}$$

$$10. J = \left(\frac{x}{2} - \frac{a}{4}\right)(4x+16a) = \frac{4x^2}{2} + \frac{16ax}{2} - \frac{4ax}{4} - \frac{16a^2}{4} = 2x^2 + 7ax - 4a^2.$$

Éléments de correction - Exercice 25

On peut s'aider d'identités remarquables pour toutes les questions de cet exercice.

- $A = (6 - 3x)^2 = 9x^2 - 36x + 36.$
- $B = (1 + 8x)^2 = 64x^2 + 16x + 1.$
- $C = (4x + 5)(5 - 4x) = -16x^2 + 25.$
- $D = (7 - 4x)^2 = 16x^2 - 56x + 49.$
- $E = (-2x - 9)^2 = (2x + 9)^2 = 4x^2 + 36x + 81.$
- $F = (6 - 2x)(6 + 2x) = -4x^2 + 36.$
- $G = 9x^2 - 8x + \frac{16}{9}.$
- $H = \left(2x - \frac{5}{2}\right)^2 = 4x^2 - 10x + \frac{25}{4}.$
- $I = (7x-3)(7x+3) - (8x+5)(8x-5) = 49x^2 - 9 - (64x^2 - 25) = 49x^2 - 9 - 64x^2 + 25 = -15x^2 + 16.$
- $$\begin{aligned}
 J &= (5x-3)^2 - (3x-7)^2 \\
 &= 25x^2 - 30x + 9 - (9x^2 - 42x + 49) \\
 &= 25x^2 - 30x + 9 - 9x^2 + 42x - 49 \\
 &= 16x^2 + 12x - 40.
 \end{aligned}$$

Éléments de correction - Exercice 26

- $$\begin{aligned}
 A &= (2x^2 - 3x + 2x - 3)(x+2) = (2x^2 - x - 3)(x+2) \\
 &= 2x^3 + 4x^2 - x^2 - 2x - 3x - 6 \\
 &= 2x^3 + 3x^2 - 5x - 6.
 \end{aligned}$$
- $B = (1-2x)^2(1-2x) = (1-4x+4x^2)(1-2x) = 1-2x-4x+8x^2+4x^2-8x^3 = 1-6x+12x^2-8x^3.$
- Ici, on pourrait utiliser l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ avec $A = x+y$ et $B = 1$, ce qui donne $B = (x+y)^2 + 2(x+y) + 1$, puis développer à nouveau $(x+y)^2$ à l'aide de la première identité remarquable. Il est plus commode de remarquer que la première inégalité remarquable se généralise ainsi :*

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

(dans le développement, les carrés de a , b et c apparaissent, ainsi que tous les « double produits » possibles, à savoir $2ab$, $2ac$ et $2bc$). Notons qu'on peut généraliser de la même façon pour développer $(a+b+c+d)^2$, etc.

$$C = x^2 + y^2 + 1 + 2xy + 2x + 2y.$$

- $$\begin{aligned}
 D &= (x-y)(x+3y) - (x+y)(x-4y) + 2(x-2y)^2 \\
 &= x^2 + 3xy - xy - 3y^2 - (x^2 - 4xy + xy - 4y^2) + 2(x^2 - 4xy + 4y^2) \\
 &= x^2 + 2xy - 3y^2 - x^2 + 3xy + 4y^2 + 2x^2 - 8xy + 8y^2 \\
 &= 2x^2 + 9y^2 - 3xy.
 \end{aligned}$$

Éléments de correction - Exercice 27

- $A = 8a^2 - 24a + 32a^3 = 8a(a - 3 + 4a^2).$
- $B = a \times 3ax - 2x \times 3ax + 4b \times 3ax = 3ax(a - 2x + 4b).$

3. $C = 5a^4b^3 + 2a^2x^3 - 3a^2b^5 = a^2 \times 5a^2b^3 + a^2 \times 2x^3 + a^2 \times (-3b^5) = a^2(5a^2b^3 + 2x^3 - 3b^5)$.
4. $D = a^6x^4 - 6a^5x^6 + 9a^4x = a^4x \times a^2x^3 + a^4x \times (-6a^2x^5) + a^4x \times 9 = a^4x(a^2x^3 - 6a^2x^5 + 9)$.
5. $E = 8x^2y^3 - 3xy^4 + 24x^2y^5 = xy^3 \times 8x + xy^3 \times (-y) + xy^3 \times (24xy^2) = xy^3(8x - y + 24xy^2)$.
6. $F = 15a^2b^2 - 30a^2b^3 + 105a^2b^4 - 75a^2b^5$
 $= 15a^2b^2 \times 1 + 15a^2b^2 \times (-2b) + 15a^2b^2 \times 7b^2 + 15a^2b^2 \times (-5b^3)$
 $= 15a^2b^2(1 - 2b + 7b^2 - 5b^3)$.
7. $G = 6a^4b^3c^2d - 2a^3b^4cd + 8a^5b^2d^3$
 $= 2a^3b^2d \times 3abc^2 + 2a^3b^2d \times (-2b^2c) + 2a^3b^2d \times 4a^2d^2$
 $= 2a^3b^2d(3abc^2 - 2b^2c + 4a^2d^2)$.

Éléments de correction - Exercice 28

1. $A = (2x - 3)(5x - 1) - (2x - 3)(x + 1)$
 $= (2x - 3)(5x - 1 - (x + 1))$
 $= (2x - 3)(4x - 2)$
 $= 2(2x - 3)(2x - 1)$.
2. $B = (7x - 1)^2 - (7x - 1)(3x + 2)$
 $= (7x - 1)(7x - 1) - (7x - 1)(3x + 2)$
 $= (7x - 1)(7x - 1 - (3x + 2))$
 $= (7x - 1)(7x - 1 - 3x - 2)$
 $= (7x - 1)(4x - 3)$.
3. $C = (4 - 3x)(2 + 3x) - 2(1 - 2x)(3x - 4)$
 $= (4 - 3x)(2 + 3x) + (4 - 3x)2(1 - 2x)$
 $= (4 - 3x)(2 + 3x + 2(1 - 2x))$
 $= (4 - 3x)(2 + 3x + 2 - 4x)$
 $= (4 - 3x)(4 - x)$.
4. $D = (3x + 1)(2x - 3) + (3x + 1)(x + 2) - (5x + 4)(3x + 1)$
 $= (3x + 1)(2x - 3 + x + 2 - (5x + 4))$
 $= (3x + 1)(3x - 1 - 5x - 4)$
 $= (3x + 1)(-2x - 5)$
 $= -(3x + 1)(2x + 5)$.
5. $E = (x - 8)(4x - 1) + x^2 - 8x$
 $= (x - 8)(4x - 1) + x(x - 8)$
 $= (x - 8)(4x - 1 + x)$
 $= (x - 8)(5x - 1)$.
6. $F = x^2 - x + (x + 1)(1 - x)$
 $= x(x - 1) - (x + 1)(x - 1)$
 $= (x - 1)(x - (x + 1))$
 $= (x - 1)(-1)$
 $= 1 - x$.

Éléments de correction - Exercice 29

Dans cet exercice, on pourra reconnaître systématiquement une (ou plusieurs !) identités remarquables.

1. $A = a^4 + 4a^2b + 4b^2 = (a^2)^2 + 2a^2 \cdot 2b + (2b)^2 = (a^2 + 2b)^2$.
2. $B = 4a^2 - 12ab + 9b^2 = (2a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot 3b + (3b)^2 = (2a - 3b)^2$.
3. $C = x^2 - x + \frac{1}{4} = x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$.
4. $D = 9a^2 + \frac{b^2}{4} + 3ab = (3a)^2 + 2 \cdot 3a \cdot \frac{b}{2} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(3a + \frac{b}{2}\right)^2$.
5. $E = 9x^2 - 6x + 1 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 1 + 1^2 = (3x - 1)^2$.
6. $F = 4x^2 + 4x + 1 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1^2 = (2x + 1)^2$.

$$7. G = 4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2 = (4x + 3y)^2.$$

$$8. H = 2(x^2 - 6x + 9) = 2(x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2) = 2(x - 3)^2.$$

$$9. I = 9b^2 + 6ab + a^2 = (3b)^2 + 2 \cdot 2b \cdot a + a^2 = (3b + a)^2.$$

$$10. J = 64a^6 - 16a^3b + b^2 = (8a^3)^2 - 2 \cdot 8a^3 \cdot b + b^2 = (8a^3 + b)^2.$$

$$\begin{aligned} K &= x^2 - 2x(x+1) + (x+1)^2 = (x-1)(x+1) - x(x+1) + (x+1)(x+1) \\ 11. &= (x-1)(x+1-x+x+1) \\ &= (x-1)(2x+2) \\ &= 2(x-1)(x+1). \end{aligned}$$

$$12. L = (1-x)^2 + 6x + 3 = 1 - 2x + x^2 + 6x + 3 = x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 = (x+2)^2.$$

Éléments de correction - Exercice 30

Dans toutes les questions, on cherchera à reconnaître la troisième identité remarquable. Elle est très simple à identifier en pratique, puisque c'est la seule qui ne fait intervenir que deux termes.

$$1. A = a^2 - 25 = a^2 - 5^2 = (a-5)(a+5).$$

$$2. B = 4x^2 - 1 = (2x)^2 - 1^2 = (2x-1)(2x+1).$$

$$3. C = 9x^2 - 4y^2 = (3x)^2 - (2y)^2 = (3x-2y)(3x+2y).$$

$$4. D = 25a^2 - 16b^2 = (5a)^2 - (4b)^2 = (5a-4b)(5a+4b).$$

$$5. E = 5x^3 - 80x = x(5x^2 - 80) = 5x(x^2 - 16) = 5x(x^2 - 4^2) = 5x(x-4)(x+4). \text{ Notons qu'ici on a commencé par factoriser par } x. \text{ Quand il y a un facteur évident dans une expression, il faut toujours commencer par factoriser par celui-ci, cela facilite grandement la suite des calculs.}$$

$$6. F = 4x^2 - a^2y^2 = (2x)^2 - (ay)^2 = (2x-ay)(2x+ay).$$

$$7. G = (7x)^2 - 5^2 = (7x-5)(7x+5).$$

$$8. H = (a+1)^2 - a^2 = (a+1-a)(a+a+1) = 1 \cdot (2a+1) = 2a+1.$$

$$9. I = 9x^2 - (x+2)^2 = (3x - (x+2))(3x + (x+2)) = (3x - x - 2)(3x + x + 2) = (2x-2)(4x+2). \text{ Il faut faire attention aux parenthèses!}$$

$$10. J = \frac{a^2}{9} - \frac{x^2}{25} = \left(\frac{a}{3}\right)^2 - \left(\frac{x}{5}\right)^2 = \left(\frac{a}{3} - \frac{x}{5}\right) \left(\frac{a}{3} + \frac{x}{5}\right) = \frac{5a-3x}{15} \cdot \frac{5a+3x}{15} = \frac{(5a-3x)(5a+3x)}{225}.$$

Remarque : quand on cherche à factoriser une expression avec des quotients, il faut prendre l'habitude d'écrire à la fin les différents facteurs comme une seule fraction.

$$\begin{aligned} 11. K &= \frac{a^2}{x^2} - \frac{9b^2}{y^2} \\ &= \left(\frac{a}{x}\right)^2 - \left(\frac{3b}{y}\right)^2 \\ &= \left(\frac{a}{x} - \frac{3b}{y}\right) \left(\frac{a}{x} + \frac{3b}{y}\right) \\ &= \frac{ay-3bx}{xy} \cdot \frac{ay+3bx}{xy} \\ &= \frac{(ay-3bx)(ay+3bx)}{(xy)^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12. L &= (3x-4)^2 - \frac{25}{4} \\ &= (3x-4)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 \\ &= \left(3x-4 - \frac{5}{2}\right) \left(3x-4 + \frac{5}{2}\right) \\ &= \frac{6x-8-5}{2} \cdot \frac{6x-8+5}{2} \\ &= \frac{(6x-13)(6x-3)}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 13. \quad M &= \frac{(x+1)^2}{9} - \frac{x^2}{16} \\
 &= \left(\frac{x+1}{3}\right)^2 - \left(\frac{x}{4}\right)^2 \\
 &= \left(\frac{x+1}{3} - \frac{x}{4}\right) \left(\frac{x+1}{3} + \frac{x}{4}\right) \\
 &= \frac{4(x+1) - 3x}{12} \cdot \frac{4(x+1) + 3x}{12} \\
 &= \frac{(4x+4-3x)(4x+4+3x)}{144} \\
 &= \frac{(x+4)(7x+4)}{144}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 14. \quad N &= (x+3)^2 - (x+1)^2 \\
 &= ((x+3) - (x+1))((x+3) + (x+1)) \\
 &= (x+3-x-1)(x+3+x+1) \\
 &= 2(2x+4) \\
 &= 4(x+2).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 15. \quad O &= (a+b)^2 - (a-b)^2 \\
 &= ((a+b) - (a-b))((a+b) + (a-b)) \\
 &= (a+b-a+b)(a+b+a-b) \\
 &= 2b \cdot 2a \\
 &= 4ab.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 16. \quad P &= (2x+1)^2 - (3x-4)^2 \\
 &= (2x+1 - (3x-4))(2x+1 + 3x-4) \\
 &= (2x+1-3x+4)(5x-3) \\
 &= (-x+5)(5x-3).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 17. \quad Q &= (2x+3)^2 - (1-4x)^2 \\
 &= (2x+3 - (1-4x))(2x+3 + 1-4x) \\
 &= (2x+3-1+4x)(-2x+4) \\
 &= (6x+2)(-2x+4) \\
 &= 4(3x+1)(-x+2).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 18. \quad R &= (3x-4)^2 - 4(x+2)^2 \\
 &= (3x-4)^2 - (2(2x+2))^2 \\
 &= (3x-4 - 2(2x+2))(3x-4 + 2(2x+2)) \\
 &= (3x-4-4x-4)(3x-4+4x+4) \\
 &= (-x-8)7x \\
 &= -(x+8)7x.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 19. \quad S &= 4(2x+3)^2 - (3x-2)^2 \\
 &= (2(2x+3))^2 - (3x-2)^2 \\
 &= (4x+6)^2 - (3x-2)^2 \\
 &= (4x+6 - (3x-2))(4x+6 + 3x-2) \\
 &= (x+8)(7x+4).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 20. \quad T &= 25(3x-1)^2 - 16(5x+3)^2 \\
 &= (5(3x-1))^2 - (4(5x+3))^2 \\
 &= (15x-5)^2 - (20x+12)^2 \\
 &= (15x-5-20x-12)(15x-5+20x+12) \\
 &= (-5x-17)(35x+7) \\
 &= -7(5x+17)(5x+1).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 21. \quad U &= (x^2-16)^2 - (x+4)^2 && \text{Or le discriminant de } x^2-x-20 \text{ est } (-1)^2-4 \cdot \\
 &= (x^2-16 - (x+4))(x^2-16 + (x+4)) \\
 &= (x^2-x-20)(x^2+x-12).
 \end{aligned}$$

$(-20) \cdot 1 = 81$, donc ses racines sont $\frac{-(-1) - \sqrt{81}}{2 \cdot 1} = \frac{1-9}{2} = -4$ et $\frac{-(-1) + \sqrt{81}}{2 \cdot 1} = \frac{1+9}{2} = 5$.

Ainsi, $x^2 - x - 20 = (x - (-4))(x - 5) = (x + 4)(x - 5)$.

De même, on peut factoriser $x^2 + x - 12$. Le discriminant de ce trinôme vaut $(1)^2 - 4 \cdot (-12) \cdot 1 =$

$1 + 48 = 49$, donc ses racines sont $\frac{-1 - \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{-1-7}{2} = -4$ et $\frac{-1 + \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{-1+7}{2} = 3$. Ainsi,

$$x^2 + x - 12 = (x + 4)(x - 3).$$

$$\text{Finalement, } U = (x + 4)(x - 5)(x + 4)(x - 3) = (x + 4)^2(x - 5)(x - 3).$$

Éléments de correction - Exercice 31

1. $3^4 \cdot 5^4 = (3 \times 5)^4 = 15^4.$
2. $(5^3)^{-2} = 5^{3 \times (-2)} = 5^{-6}.$
3. $\frac{2^5}{2^{-2}} = 2^{5 - (-2)} = 2^7.$
4. $(-7)^3 \cdot (-7)^{-5} = (-7)^{3-5} = -7^{-2}.$
5. $\frac{6^5}{2^5} = \left(\frac{6}{2}\right)^5 = 3^5.$
6. $\frac{(30^4)^7}{2^{28} \cdot 5^{28}} = \frac{30^{28}}{10^{28}} = \left(\frac{30}{10}\right)^{28} = 3^{28}.$

12.5 Résolution d'équations

Éléments de correction - Exercice 32

1. Soit $x \in \mathbf{R}.$

$$\begin{aligned} x + 3 &= 2 \\ x &= -1. \end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation est $\{-1\}.$

2. Soit $x \in \mathbf{R}.$

$$\begin{aligned} -5 + x &= 4 \\ x &= 9. \end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation est $\{9\}.$

3. Soit $x \in \mathbf{R}.$

$$\begin{aligned} 3x &= 2 \\ x &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{\frac{2}{3}\right\}.$

4. Soit $x \in \mathbf{R}.$

$$\begin{aligned} -5x &= 4 \\ x &= -\frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{-\frac{4}{5}\right\}.$

5. Soit $x \in \mathbf{R}.$

$$\begin{aligned} -4x &= -10 \\ x &= \frac{-10}{-4} \\ x &= \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{\frac{5}{2}\right\}.$

6. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} 3 - x &= -8 \\ -x &= -11 \\ x &= 11. \end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation est $\{11\}$.

7. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} 2x + 4 &= 5x - 7 \\ -3x + 4 &= -7 \\ -3x &= -11 \\ x &= \frac{11}{3}. \end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{\frac{11}{3}\right\}$.

8. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}x - 5 &= \frac{1}{2}x - 3 \\ \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)x - 5 &= -3 \\ \frac{1}{6}x &= 2 \\ x &= 12. \end{aligned}$$

(on a multiplié des deux côtés par 6 à la dernière étape). Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation est $\{12\}$.

9. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} x + 4 &= x - 7 \\ 4 &= -7. \end{aligned}$$

(on a enlevé x des deux côtés). Puisque l'égalité obtenue est impossible, l'équation n'admet pas de solution. Autrement dit, l'ensemble des solutions de l'équation est \emptyset .

Éléments de correction - Exercice 33

1. $x^2(x+1) = 4(x+1)$

On a

$$\begin{aligned} x^2(x+1) &= 4(x+1) \\ x^2(x+1) - 4(x+1) &= 0 \\ (x+1)(x^2 - 4) &= 0 \\ (x+1)(x-2)(x+2) &= 0 \end{aligned}$$

d'où $\boxed{\mathcal{S} = \{-2; -1; 2\}}$

2. $(3x+2)^2 = (x+1)^2$

On a

$$\begin{aligned} (3x+2)^2 &= (x+1)^2 \\ (3x+2)^2 - (x+1)^2 &= 0 \\ (3x+2-x-1)(3x+2+x+1) &= 0 \\ (2x+1)(3x+3) &= 0 \end{aligned}$$

d'où

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{-1}{2}; -1 \right\}$$

3. $(x - 5)(x - 7) = (x - 5)^2$

On a

$$\begin{aligned} (x - 5)(x - 7) &= (x - 5)^2 \\ (x - 5)(x - 7) - (x - 5)^2 &= 0 \\ (x - 5)((x - 7) - (x - 5)) &= 0 \\ -2(x - 5) &= 0 \end{aligned}$$

d'où

$$\mathcal{S} = \{5\}$$

4. $(2x - 3)(5x + 1)(5 - 2x) = 0$

On a déjà un produit nul. On peut conclure immédiatement

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{3}{2}; \frac{-1}{5}; \frac{5}{2} \right\}$$

5. $2(x + 2)(x - 4) = x^2 - 4$

On a

$$\begin{aligned} 2(x + 2)(x - 4) &= x^2 - 4 \\ 2(x + 2)(x - 4) - (x^2 - 4) &= 0 \\ 2(x + 2)(x - 4) - (x - 2)(x + 2) &= 0 \\ (x + 2)(2x - 8 - x + 2) &= 0 \\ (x + 2)(x - 6) &= 0 \end{aligned}$$

d'où

$$\mathcal{S} = \{-2; 6\}$$

6. $(3x - 1)(5x - 4) = 25x^2 - 16$

On a

$$\begin{aligned} (3x - 1)(5x - 4) &= 25x^2 - 16 \\ (3x - 1)(5x - 4) - (25x^2 - 16) &= 0 \\ (3x - 1)(5x - 4) - (5x - 4)(5x + 4) &= 0 \\ (5x - 4)(3x - 1 - 5x - 4) &= 0 \\ (5x - 4)(-2x - 5) &= 0 \end{aligned}$$

d'où

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{4}{5}; \frac{-5}{2} \right\}$$

7. $3x(1 - 3x) = 0$

On a déjà un produit nul. On peut conclure immédiatement

$$\mathcal{S} = \left\{ 0; \frac{1}{3} \right\}$$

Attention à l'erreur $3x = 0$ donc $x = -3$!!!! On rappelle que la seule solution de $3x = 0$ est $x = 0$.

8. $\left(\frac{2x - 5}{3}\right)^2 \left(\frac{4x}{5} - \frac{3}{7}\right) = 0$

On a déjà un produit nul. On peut conclure immédiatement en se rappelant que la seule solution de $\frac{2x - 5}{3} = 0$ est $\frac{5}{2}$ et que la seule solution de $\frac{4x}{5} - \frac{3}{7} = 0$ est $\frac{\frac{3}{7}}{\frac{4}{5}} = \frac{15}{28}$

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{5}{2}; \frac{15}{28} \right\}$$

9. $4x^4 - 1 = 2x^2 + 1$

On a

$$\begin{aligned} 4x^4 - 1 &= 2x^2 + 1 \\ (2x^2)^2 - 1^2 - (2x^2 + 1) &= 0 \\ (2x^2 + 1)(2x^2 - 1) - (2x^2 + 1) &= 0 \\ (2x^2 + 1)((2x^2 - 1) - 1) &= 0 \\ (2x^2 + 1)2(x^2 - 1) &= 0 \\ (2x^2 + 1)2(x - 1)(x + 1) &= 0 \end{aligned}$$

Comme pour tout réel x , $2x^2 + 1 \geq 1 > 0$, il n'y a aucun réel vérifiant $2x^2 + 1 = 0$ d'où

$$\mathcal{S} = \{-1; 1\}$$

10. $9x^2 + 1 = 6x$

On a

$$\begin{aligned} 9x^2 + 1 &= 6x \\ 9x^2 - 6x + 1 &= 0 \\ (3x)^2 - 2 \times 3x \times 1 + 1^2 &= 0 \\ (3x - 1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

d'où

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{3} \right\}$$

Éléments de correction - Exercice 34

1. $(x - 1)(x - 2) + (x - 1)(x - 3) = 2(x - 2)(x - 3)$

Il n'y a aucun facteur commun : on développe et réduit.

$$\begin{aligned} (x - 1)(x - 2) + (x - 1)(x - 3) &= 2(x - 2)(x - 3) \\ x^2 - 3x + 2 + x^2 - 4x + 3 &= 2x^2 - 10x + 12 \\ 3x - 7 &= 0 \end{aligned}$$

d'où

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{7}{3} \right\}$$

2. $(x - a)(x - 2a)(x + a) = x^3 + 2a^3$

Il n'y a aucun facteur commun : on développe et réduit.

$$\begin{aligned} (x - a)(x - 2a)(x + a) &= x^3 + 2a^3 \\ (x - 2a)(x^2 - a^2) &= x^3 + 2a^3 \\ x^3 - 2ax^2 - a^2x + 2a^3 &= x^3 + 2a^3 \\ -2ax^2 - a^2x &= 0 \\ x(-2ax - a^2) &= 0 \end{aligned}$$



⚠ Pour dire que la seule solution de $-2ax - a^2 = 0$ est $x = \frac{a^2}{-2a} = \frac{a}{-2}$, il est indispensable de supposer $a \neq 0$.

Il convient donc d'étudier le cas $a = 0$: dans ce cas, l'équation $-2ax - a^2 = 0$ c'est à dire $0x = 0$ est vérifiée par tout réel x . En conclusion :

— si $a \neq 0$ alors $\mathcal{S} = \left\{ 0; \frac{a}{-2} \right\}$.

— si $a = 0$ alors $\boxed{\mathcal{S} = \mathbb{R}}$

3. $(\frac{1}{2} - x)(5x + 3) + 3x(2x - 1) = 0$
On peut faire apparaître un facteur commun.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}((1 - 2x)(5x + 3)) + 3x(2x - 1) &= 0 \\ (1 - 2x)(\frac{5}{2}x + \frac{3}{2}) - 3x &= 0 \\ (1 - 2x)(\frac{-1}{2}x + \frac{3}{2}) &= 0\end{aligned}$$

Finalement : $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}; 3\right\}}$.

4. $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$
On peut faire apparaître un facteur commun.

$$\begin{aligned}x^3 + 2x^2 - x - 2 &= 0 \\ x^2(x + 2) - (x + 2) &= 0 \\ (x + 2)(x^2 - 1) &= 0 \\ (x + 2)(x - 1)(x + 1) &= 0\end{aligned}$$

Finalement : $\boxed{\mathcal{S} = \{-1; -2; 1\}}$.

5. $\sqrt{2}x^4 - 4x^2 = -2\sqrt{2}$
On peut factoriser à l'aide d'une identité remarquable.

$$\begin{aligned}\sqrt{2}x^4 - 4x^2 &= -2\sqrt{2} \\ \sqrt{2}x^4 - 4x^2 + 2\sqrt{2} &= 0 \\ \sqrt{2}(x^4 - 2\sqrt{2}x^2 + 2) &= 0 \\ \sqrt{2}(x^4 - 2\sqrt{2}x^2 + (\sqrt{2})^2) &= 0 \\ \sqrt{2}(x^2 - \sqrt{2})^2 &= 0 \\ \sqrt{2}(x - \sqrt{\sqrt{2}})^2(x + \sqrt{\sqrt{2}})^2 &= 0\end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\sqrt{\sqrt{2}}; -\sqrt{\sqrt{2}}\right\}}$.

Éléments de correction - Exercice 35

- $3x^2 - 5x + 1 = 0$
 $a = 3, b = -5, c = 1, \Delta = 13, \mathcal{S} = \left\{\frac{5 - \sqrt{13}}{6}, \frac{5 + \sqrt{13}}{6}\right\}$
- $-4x + 2x^2 - 3 = 0$
 $a = 2, b = -4, c = -3, \Delta = 40, \mathcal{S} = \left\{\frac{4 - \sqrt{20}}{4}, \frac{4 + \sqrt{20}}{4}\right\}$
- $x^2 + x = -1$ c'est à dire $x^2 + x + 1 = 0$
 $a = 1, b = 1, c = 1, \Delta = -3, \mathcal{S} = \emptyset$
- $5x^2 - 4x + 1 = 0$
 $a = 5, b = -4, c = 1, \Delta = -4, \mathcal{S} = \emptyset$
- $x^2 - 6x + 9 = 0$
 $a = 1, b = -6, c = 9, \Delta = 0, \mathcal{S} = \{3\}$
- $\frac{x^2}{4} + x + 1 = 0$
 $a = \frac{1}{4}, b = 1, c = 1, \Delta = 0, \mathcal{S} = \{-2\}$
- $-2x^2 - 3x + 6 = 0$
 $a = -2, b = -3, c = 6, \Delta = 57, \mathcal{S} = \left\{\frac{3 - \sqrt{57}}{-4}, \frac{3 + \sqrt{57}}{-4}\right\}$
- $\sqrt{2}x^2 - 3x + \sqrt{2} = 0$
 $a = \sqrt{2}, b = -3, c = \sqrt{2}, \Delta = 1, \mathcal{S} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}\right\}$

$$9. \frac{3}{4}x^2 + \sqrt{7}x - 3 = 0$$

$$a = \frac{3}{4}, b = \sqrt{7}, c = -3, \Delta = 16, \mathcal{S} = \left\{ \frac{-\sqrt{7}-4}{\frac{3}{2}}, \frac{-\sqrt{7}+4}{\frac{3}{2}} \right\}$$

$$10. 7x^2 + 6x = 1$$

$$a = 7, b = 6, c = -1, \Delta = 64, \mathcal{S} = \left\{ -1; \frac{1}{7} \right\}$$

Éléments de correction - Exercice 36

m désigne un nombre réel. Soit (E_m) l'équation $(m-1)x^2 + 2mx + m + 2 = 0$ d'inconnue réelle x .

1. Pour $m = 0$, on obtient l'équation $-x^2 + 2 = 0$ c'est à dire $x^2 = 2$. Il y a donc deux solutions : $\sqrt{2}, \sqrt{2}$.

Pour $m = 1$, on obtient l'équation $2x + 3 = 0$. Il y a une unique solution : $\frac{-3}{2}$.

2. $x = 0$ est solution uniquement lorsque $(m-1) \times 0^2 + 2m \times 0 + m + 2 = 0$ c'est à dire pour $m = -2$. En particulier, pour $m = -2$, on obtient $-3x^2 - 4x = 0$ d'où $x(-3x - 4) = 0$. Il y a deux solutions : 0 et $\frac{-4}{3}$.

3. Notons que l'équation (E_m) est une équation du seconde degré lorsque $m - 1 \neq 0$ soit lorsque $m \neq 1$ et une équation du premier degré lorsque $m = 1$. Dans ce dernier cas, comme nous l'avons vu, l'équation ne possède qu'une unique solution : $\frac{-3}{2}$.

Examinons alors le cas $m \neq 1$. On identifie les coefficients $a = m - 1, b = 2m, c = m + 2$. On en déduit que $\Delta = (2m)^2 - 4(m+2)(m-1) = 4m^2 - 4m^2 - 4m + 8 = -4(m-2)$. On en déduit que si $m \neq 1$ et $m < 2$ alors $\Delta > 0$, si $m = 2$ alors $\Delta = 0$ et si $m > 2$ alors $\Delta < 0$. Finalement, :

(a) (E_m) possède une unique solution pour $m = 1$ ou $m = 2$.

(b) (E_m) possède deux solutions distinctes pour $m \neq 1$ et $m < 2$

(c) (E_m) n'a aucune solution réelle lorsque $m > 2$.

Éléments de correction - Exercice 37

$$1. \frac{2x+8}{5-2x} = 0$$

Valeur interdite : $x = \frac{5}{2}$, solution possible : $x = -4$. Finalement, $\boxed{\mathcal{S} = \{-4\}}$

$$2. \frac{3x+1}{2+6x} = 0$$

Valeur interdite : $x = \frac{-1}{3}$, solution possible : $x = \frac{-1}{3}$. Finalement, $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$

$$3. \frac{10x-15}{12-8x} = 0$$

Valeur interdite : $x = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$, solution possible : $x = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$. Finalement, $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$

$$4. \frac{(-6x+5)(3x-1)}{(7+3x)(6x-2)} = 0$$

Valeurs interdites : $x = \frac{-3}{7}$, $x = \frac{1}{3}$, solutions possibles : $x = \frac{5}{6}$ ou $x = \frac{1}{3}$. Finalement,

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \frac{5}{6} \right\}}$$

$$5. \frac{(-x+5)(3x-1)}{(2+3x)(-7x-3)} = 0$$

Valeurs interdites : $x = \frac{-2}{3}$ ou $x = \frac{-3}{7}$, solutions possibles : $x = 5$ ou $x = \frac{1}{3}$. Finalement,

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ 5; \frac{1}{3} \right\}}$$

$$6. \frac{(2x+1)(5x-4)(8x-6)}{(-4x+3)(-6x-3)} = 0$$

Valeurs interdites : $x = \frac{3}{4}$ ou $x = \frac{-1}{2}$, solutions possibles : $x = \frac{-1}{2}$ ou $x = \frac{4}{5}$ ou $x = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

Finalement, $\mathcal{S} = \left\{ \frac{4}{5} \right\}$

Éléments de correction - Exercice 38

$$1. \frac{2}{3x+1} = 5$$

On se ramène à $\frac{2}{3x+1} - 5 = 0$ c'est à dire $\frac{2}{3x+1} - \frac{5(3x+1)}{3x+1} = 0$ d'où $\frac{-15x-3}{3x+1} = 0$.

Valeur interdite : $x = \frac{-1}{3}$, solution possible : $x = \frac{-3}{15} = \frac{-1}{5}$. Finalement, $\mathcal{S} = \left\{ \frac{-1}{5} \right\}$

$$2. \frac{3x+1}{6-5x} = 2$$

On se ramène à $\frac{3x+1}{6-5x} - 2 = 0$ c'est à dire $\frac{3x+1}{6-5x} - \frac{2(6-5x)}{6-5x} = 0$ d'où $\frac{13x-11}{6-5x} = 0$.

Valeur interdite : $x = \frac{6}{5}$, solution possible : $x = \frac{11}{13}$. Finalement, $\mathcal{S} = \left\{ \frac{11}{13} \right\}$

$$3. \frac{9-x^2}{x-3} = 0$$

Valeur interdite : $x = 3$, solutions possibles : $x = 3$ ou $x = -3$. Finalement, $\mathcal{S} = \{-3\}$

$$4. \frac{3}{(x-1)(6x-2)} = \frac{4}{1-2x}$$

On se ramène à $\frac{3}{(x-1)(6x-2)} - \frac{4}{1-2x}$ c'est à dire $\frac{3(1-2x) - 4(x-1)(6x-2)}{(x-1)(6x-2)(1-2x)} = 0$ d'où $\frac{-24x^2 + 26x - 5}{(x-1)(6x-2)(1-2x)} = 0$.

Valeurs interdites : $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, solutions possibles : (on obtient une équation du second degré avec $\Delta = 26^2 - 20 \times 24 = 676 - 480 = 196 = 14^2$) $x = \frac{-40}{-48} = \frac{5}{6}$ ou $x = \frac{-12}{-48} = \frac{1}{4}$. Finalement,

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{5}{6}, \frac{1}{4} \right\}$$

$$5. \frac{x-3}{x+1} + \frac{2x+5}{x-2} = 3$$

On se ramène à $\frac{x-3}{x+1} + \frac{2x+5}{x-2} - 3 = 0$ c'est à dire

$$\begin{aligned} \frac{(x-3)(x-2) + (2x+5)(x+1) - 3(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)} &= 0 \\ \frac{x^2 - 5x + 6 + 2x^2 + 7x + 5 - 3x^2 + 3x + 6}{(x+1)(x-2)} &= 0 \\ \frac{5x + 17}{(x+1)(x-2)} &= 0 \end{aligned}$$

Valeurs interdites : $-1, 2$, solution possible : $\frac{-17}{5}$. Finalement, $\mathcal{S} = \left\{ \frac{-17}{5} \right\}$

$$6. \frac{2x^2+1}{3+x} = 2x$$

On se ramène à $\frac{2x^2+1}{3+x} - 2x = 0$ c'est à dire

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 + 1}{3 + x} - \frac{2x(3 + x)}{3 + x} &= 0 \\ \frac{2x^2 + 1 - 6x - 2x^2}{3 + x} &= 0 \\ \frac{1 - 6x}{3 + x} &= 0 \end{aligned}$$

Valeur interdite : -3 , solution possible : $\frac{1}{6}$. Finalement, $\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{6} \right\}$

7. $\frac{1}{1-2x} + 4 = \frac{-4x}{2-x}$

On se ramène à $\frac{1}{1-2x} + 4 - \frac{-4x}{2-x} = 0$ c'est à dire

$$\begin{aligned} \frac{2-x}{(1-2x)(2-x)} + \frac{4(2-x)(1-2x)}{(2-x)(1-2x)} + \frac{4x(1-2x)}{(2-x)(1-2x)} &= 0 \\ \frac{2-x + 8x^2 - 20x + 8 + 4x - 8x^2}{(2-x)(1-2x)} &= 0 \\ \frac{10 - 17x}{(2-x)(1-2x)} &= 0 \end{aligned}$$

Valeurs interdites : $2, \frac{1}{2}$, solution possible : $\frac{10}{17}$. Finalement, $\mathcal{S} = \left\{ \frac{10}{17} \right\}$

8. $\frac{x}{3x-1} = \frac{3x-1}{x}$

On se ramène à $\frac{x}{3x-1} - \frac{3x-1}{x} = 0$ c'est à dire

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - (3x-1)^2}{x(3x-1)} &= 0 \\ \frac{(4x-1)(-2x+1)}{x(3x-1)} &= 0 \end{aligned}$$

Valeurs interdites : $0, \frac{1}{3}$, solutions possibles : $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$. Finalement, $\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right\}$

Éléments de correction - Exercice 39

Soit (E) l'équation $2x^4 - 9x^3 + 8x^2 - 9x + 2 = 0$.

1. Remplaçons x par 0 : $2x^4 - 9x^3 + 8x^2 - 9x + 2 = 2 \neq 0$ ainsi 0 n'est pas solution de (E).
2. Développons

$$\begin{aligned} 2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) - 9 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 8 &= \frac{2x^4 + 2}{x^2} - \frac{9x^2 - 9}{x} + 8 \\ &= \frac{2x^4 + 2}{x^2} - \frac{9x^3 - 9x}{x^2} + \frac{8x^2}{x^2} \\ &= \frac{2x^4 - 9x^3 + 8x^2 + 9x + 2}{x^2} \end{aligned}$$

Ainsi les solutions de $2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) - 9 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 8 = 0$ seront les mêmes solutions que $\frac{2x^4 - 9x^3 + 8x^2 + 9x + 2}{x^2} = 0$ ce qui revient à $2x^4 - 9x^3 + 8x^2 + 9x + 2 = 0$ car 0 n'est pas solution de (E) d'après la question précédente.

3. $X = x + \frac{1}{x}$ vérifie $2X^2 - 9X + 4 = 0$ signifie que :

$$2 \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - 9 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 4 = 0$$

$$\begin{aligned}
2\left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right) - 9\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 &= 0 \\
2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 9\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 + 4 &= 0 \\
2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 9\left(x + \frac{1}{x}\right) + 8 &= 0
\end{aligned}$$

Or, les solutions de cette équation sont exactement les solutions de (E) d'après la question précédente.

4. Les solutions de $2X^2 - 9X + 4 = 0$ sont ($a = 2, b = -9, c = 4, \Delta = 49$) $\frac{9 - \sqrt{49}}{4} = \frac{1}{2}$ et $\frac{9 + \sqrt{49}}{4} = 4$. On cherche donc les réels x non nuls vérifiant $x + \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$ ou $x + \frac{1}{x} = 4$.

Résolution de $x + \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$.

On a avec $x \neq 0$:

$$\begin{aligned}
x + \frac{1}{x} &= \frac{1}{2} \\
\frac{2x^2 + 2}{x} &= \frac{1}{2} \\
\frac{2x}{2x^2 + 2} &= \frac{2x}{x} \\
2x^2 - x + 2 &= 0
\end{aligned}$$

On reconnaît une équation du second degré avec $a = 2, b = -1, c = 2, \Delta = 1 - 16 = -15 < 0$. Il n'y a donc aucune solution réelle à cette équation.

Résolution de $x + \frac{1}{x} = 4$.

On a avec $x \neq 0$:

$$\begin{aligned}
x + \frac{1}{x} &= 4 \\
\frac{x^2 + 1}{x} &= 4 \\
\frac{x}{x^2 + 1} &= \frac{x}{4x} \\
x^2 - 4x + 1 &= 0
\end{aligned}$$

On reconnaît une équation du second degré avec $a = 1, b = -4, c = 1, \Delta = 12$. Il y a deux solutions réelles : $x_1 = \frac{4 - \sqrt{12}}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$ et $x_2 = \frac{4 + \sqrt{12}}{2} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}$

Finalement, $\mathcal{S} = \{2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}\}$

Éléments de correction - Exercice 40

- $A_1 = 2x^2 + 3xy - 2y^2$.
- $A_2 = 6 + 13x + x^2 - 2x^3$.
- $A_3 = 5x^2 + 4y^2 - 4x^2y^2 - 1$.
- $A_4 = (x^2 + y^2 + z^2 + Zxy + 2xz + 2yz)$.
- $A_5 = -(x - y + 1)(x - y - 1) = -((x - y)^2 - 1) = 1 + 2xy - x^2 - y^2$.
- $A_6 = \frac{1}{4}((1 - 2x)^2 + (1 + 2y)^2 - 4(x - y)^2) = \frac{8xy - 4x + 4y + 2}{4} = \frac{4xy - 2x + 2y + 1}{2}$.

12.6 Résolution d'inéquations

Éléments de correction - Exercice 41

- $-5x + 2 \geq 0$

$$\mathcal{S} = \left] -\infty; \frac{2}{5} \right]$$

2. $4x - 3 \leq 0$

$$\mathcal{S} = \left] -\infty; \frac{3}{4} \right]$$

3. $\frac{7x+5}{5} < 0$

$$\mathcal{S} = \left] -\infty; -\frac{5}{7} \right[$$

4. $\frac{-4x}{3} - \frac{1}{4} > 0$

Cette équation est équivalente à $\frac{-16x-3}{12} > 0$.

$$\mathcal{S} = \left] -\infty; -\frac{3}{16} \right[$$

5. $5x + 2 < -3x + 4$

Cette équation est équivalente à $8x < 2$.

$$\mathcal{S} = \left] -\infty; \frac{1}{4} \right[$$

6. $-7x - 8 > 5x - 6$

Cette équation est équivalente à $12x < -2$.

$$\mathcal{S} = \left] -\infty; -\frac{1}{6} \right[$$

7. $-\sqrt{2}x - \sqrt{3} \geq 2x + \sqrt{6}$

Cette équation est équivalente à $(2 + \sqrt{2})x \leq -\sqrt{6} - \sqrt{3}$.

En remarquant que $-\sqrt{6} - \sqrt{3} = -\sqrt{3}(\sqrt{2} + 1)$ et que $2 + \sqrt{2} = \sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)$, on aboutit finalement à $\sqrt{2}x \leq -\sqrt{3}$

$$\mathcal{S} = \left] -\infty; -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right]$$

8. $\frac{-3x}{4} + \frac{5}{7} \leq \frac{4}{3} - \frac{2x}{5}$

Cette équation est équivalente à $\frac{-21x+20}{28} \leq \frac{20-6x}{15}$ c'est à dire :

$$\begin{aligned} 15(-21x+20) &\leq 28(20-6x) \\ -260 &\leq 147x \end{aligned}$$

$$\mathcal{S} = \left[\frac{-260}{147}; +\infty \right[$$

9. $10^{-2}x - 1 < 10^{-3} - \frac{x}{10^4}$

Cette équation est équivalente à $(10^{-2} + 10^{-4})x < 10^{-3} + 1$ c'est à dire :

$$x < \frac{10^{-3} + 1}{10^{-2} + 10^{-4}}$$

$$x < \frac{10010}{101}$$

$$\mathcal{S} = \left] -\infty; \frac{10010}{101} \right[$$

10. $-3x + 7 < \frac{5x}{3}$

Cette équation est équivalente à $-9x + 21 < 5x$ c'est à dire :

$$21 < 14x$$

$$\mathcal{S} = \left] \frac{3}{2}; +\infty \right[$$

Éléments de correction - Exercice 42

1. $2x + 7 \geq 0$

$$\mathcal{S} = \left[\frac{-7}{2}; +\infty \right[$$

2. $3(x - 1) \leq 1 - 2x$

$$\mathcal{S} = \left] -\infty; \frac{4}{5} \right]$$

3. $\frac{1 - 3x}{5} < 0$

$$\mathcal{S} = \left] \frac{1}{3}; +\infty \right[$$

4. $\frac{x}{2} - \frac{4 - x}{4} > 5$

On se ramène à $4x - 2(4 - x) > 40$ c'est à dire $6x > 48$.

$$\mathcal{S} =]8; +\infty[$$

5. $\frac{x - 2}{3} - \frac{1 - x}{2} \geq \frac{2(2 - x)}{3}$

On se ramène à $2(x - 2) - 3(1 - x) \geq 4(2 - x)$ c'est à dire $9x \geq 15$.

$$\mathcal{S} = \left[\frac{5}{3}; +\infty \right[$$

6. $-\sqrt{6}x - 2 > -\sqrt{2}(x + 1)$ On remarquera que $\sqrt{6} - \sqrt{2} > 0$ donc :

$$\mathcal{S} = \left] -\infty; \frac{\sqrt{2} - 2}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} \right[$$

Éléments de correction - Exercice 43

Remarquons tout d'abord que $x = 3$ est impossible car ce réel annule le dénominateur.

On peut déjà chercher les solutions vérifiant $x > 3$.

Dans ce cas, en multipliant par $x - 3 > 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} 2x + m &\leq x - 3 \\ x &\leq -3 - m \end{aligned}$$

Finalement si $3 < -3 - m$ c'est à dire si $m < -6$, les réels x vérifiant $3 < x \leq -3 - m$ sont solutions.

Si $m \geq -6$, alors $-3 - m \leq 3$ donc il n'y a pas de réel $x > 3$ qui soit solution.

On peut ensuite chercher les solutions vérifiant $x < 3$.

Dans ce cas, en multipliant par $x - 3 < 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} 2x + m &\geq x - 3 \\ x &\geq -3 - m \end{aligned}$$

Finalement si $3 > -3 - m$ c'est à dire si $m > -6$, les réels x vérifiant $-3 - m \leq x < 3$ sont solutions.

Si $m \leq -6$, alors $-3 - m \geq 3$ donc il n'y a pas de réel $x < 3$ qui soit solution.

Récapitulons :

- si $m < -6$, $\mathcal{S} =]3; -3 - m]$
- si $m > -6$, $\mathcal{S} = [-3 - m; 3[$
- si $m = -6$, $\mathcal{S} = \emptyset$

Notons qu'il est également possible de se ramener à l'inéquation $\frac{2x+m}{x-3} - 1 \leq 0$ c'est à dire $\frac{x+m+3}{x-3} \leq 0$ puis faire un tableau de signes. Pour placer $-m-3$ dans le tableau, on sera obligé de distinguer les cas $-m-3 > 3$, $-m-3 = 3$, $-m-3 < 3$. On retrouve alors les résultats précédents.

Éléments de correction - Exercice 44

Pas de corrigé

Éléments de correction - Exercice 45

Pas de corrigé

Éléments de correction - Exercice 46

Pas de corrigé

Éléments de correction - Exercice 47

Pas de corrigé

Éléments de correction - Exercice 48

1. $(2\sqrt{5})^2 = 2^2 \times \sqrt{5}^2 = 4 \times 5 = 20.$
2. $(2 + \sqrt{5})^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} + \sqrt{5}^2 = 4 + 4\sqrt{5} + 5 = 9 + 4\sqrt{5}.$
3. $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{1 + 2\sqrt{3} + 3} = \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2} = 1 + \sqrt{3}.$
4. $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} = \sqrt{9 + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} + 2} = \sqrt{(3 + \sqrt{2})^2} = 3 + \sqrt{2}.$
5. $(3 + \sqrt{7})^2 - (3 - \sqrt{7})^2 = (3 + \sqrt{7} + 3 - \sqrt{7})(3 + \sqrt{7} - 3 + \sqrt{7}) = 6 \cdot 2\sqrt{7} = 12\sqrt{7}.$
6. $(\sqrt{2\sqrt{3}})^4 = (2\sqrt{3})^2 = 4 \cdot 3 = 12.$
7. $\left(\frac{5 - \sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3}(25 - 10\sqrt{2} + 2) = \frac{27}{3} - \frac{10\sqrt{2}}{3} = 9 - \frac{10}{3}\sqrt{2}.$
8. $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3 + 2 - 2\sqrt{6} + 3 = 10.$

12.7 Exponentielle et logarithme

Éléments de correction - Exercice 49

- $\ln(\sqrt{2}) = \ln\left(2^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} \ln(2).$
- $\ln 8 = \ln(2^3) = 3 \ln(2).$
- $\ln 6 - \ln 3 = \ln(2 \times 3) - \ln 3 = \ln 2 + \ln 3 - \ln 3 = \ln 2.$
- $\ln(2e^2) = \ln 2 + \ln(e^2) = \ln 2 + 2 \ln(e) = \ln 2 + 2.$

Éléments de correction - Exercice 50

- $\frac{e^{x^2}}{(e^x)^2} = \frac{e^{x^2}}{e^{2x}} = e^{x^2-2x}.$
- $\frac{e^{x^2+2x}}{e^{(x+1)^2}} = e^{x^2+2x-(x+1)^2} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$
- $\frac{\ln(2x)}{\ln x} = \frac{\ln 2 + \ln x}{\ln x} = \frac{\ln 2}{\ln x} + \frac{\ln x}{\ln x} = \frac{\ln 2}{\ln x} + 1$, mais on ne peut pas simplifier plus. *Attention à ne surtout pas écrire $\frac{\ln(2x)}{\ln x} = \ln(2x - x)$.*
- $e^{2 \ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$. *Attention à ne surtout pas écrire $e^{2 \ln x} = 2x$. Pour simplifier une exponentielle et un logarithme, il faut qu'ils soient « accolés ».*
- $\ln(2x) - \ln x = \ln\left(\frac{2x}{x}\right) = \ln 2.$
- $\ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\ln(x^2) = -2 \ln(x).$
- On a

$$\begin{aligned} \ln(\sqrt{3} + \sqrt{2}) + \ln(\sqrt{3} - \sqrt{2}) &= \ln((\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})) \\ &= \ln\left((\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2\right) \\ &= \ln(3 - 2) \\ &= \ln 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$8. \ln(e^2 \sqrt{e}) + \ln\left(\frac{1}{e}\right) = \ln(e^2) + \ln(\sqrt{e}) - \ln e = 2 \ln e + \frac{1}{2} \ln e - \ln e = 2 + \frac{1}{2} - 1 = \frac{3}{2}.$$

$$9. \frac{\ln(e^5)}{\ln(e^3)} = \frac{5}{3}.$$

$$10. \sqrt{e^{2x}} \cdot e^{-x} = e^{\frac{1}{2} \cdot 2x} e^{-x} = e^{x-x} = e^0 = 1.$$

$$11. \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(x^2) = -\ln(x) + 2 \ln(x) = \ln(x).$$

$$12. \ln(x^3 - x^2) - \ln(x - 1) = \ln(x^2(x - 1)) - \ln(x - 1) = \ln(x^2) + \ln(x - 1) - \ln(x - 1) = 2 \ln(x).$$

Éléments de correction - Exercice 51

1. On a

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{e^{5x+3}}}{e^{3x} \times e^{-3x+1}} \\ &= \frac{(e^{5x+3})^{\frac{1}{2}}}{e^{(3x)+(-3x+1)}} \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}(5x+3)}}{e} \\ &= e^{\frac{1}{2}(5x+3)-1} \\ &= e^{\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

de la forme $A = e^y$ avec $y = \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}$.

2. On a

$$\begin{aligned} B &= \ln\left(\frac{e^2 \times 24}{e^3} \times e^2\right) \\ &= \ln(e^{2-3+2} \times 24) \\ &= \ln(e \times 24) \\ &= \ln e + \ln 24 \\ &= 1 + \ln(4 \times 6) \\ &= 1 + \ln(4) + \ln(6) \\ &= 1 + \ln(2^2) + \ln(2 \times 3) \\ &= 1 + 2 \ln(2) + \ln(2) + \ln(3) \\ &= 1 + 3 \ln(2) + \ln(3) \end{aligned}$$

de la forme $B = m + n \ln 2 + p \ln 3$ avec $m = 1$, $n = 3$ et $p = 1$.

Éléments de correction - Exercice 52

1. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} e^x &= e^{-2} \\ x &= -2. \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est $\{-2\}$.

2. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} e^x &= e \\ e^x &= e^1 \\ x &= 1. \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est $\{1\}$.

3. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} e^{x+2} &= e^3 \\ x + 2 &= 3 \\ x &= 1. \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est $\{1\}$.

4. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} e^{2x+1} &= 2 \\ 2x + 1 &= \ln(2) \\ 2x &= \ln(2) - 1 \\ x &= \frac{\ln(2) - 1}{2}. \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est $\left\{ \frac{\ln(2) - 1}{2} \right\}$.

5. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} e^x &= 1 \\ x &= \ln(1) \\ x &= 0. \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est $\{0\}$.

6. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} e^x + 4 &= 0 \\ e^x &= -4. \end{aligned}$$

Or $e^x > 0$, donc l'équation n'admet pas de solution, ce qui signifie que l'ensemble des solutions est \emptyset .

7. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} e^{x^2} &= e \\ x^2 &= \ln(e) \\ x^2 &= 1 \\ x^2 - 1 &= 0 \\ (x - 1)(x + 1) &= 0 \\ x &= 1 \text{ ou } x = -1. \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation est $\{-1, 1\}$.

8. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} e^{x^2+1} &= 1 \\ x^2 + 1 &= \ln(1) \\ x^2 + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Or $x^2 \geq 0$, donc $x^2 + 1 > 0$. En particulier, $x^2 + 1$ ne peut être nul, ce qui entraîne que l'équation n'a pas de solution.

Éléments de correction - Exercice 53

Dans tout cet exercice, on reconnaîtra des équations produits, obtenues après factorisation des expressions proposées ou en faisant apparaître des trinômes.

1. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} (e^x - 3)(e^x + 3) &= 0 \\ e^x - 3 &= 0 \text{ ou } e^x + 3 = 0 \\ e^x &= 3 \text{ ou } e^x = -3 \\ x &= \ln(3) \end{aligned}$$

car $e^x = -3$ est impossible (exponentielle ne prend que des valeurs strictement positives). Ainsi, l'ensemble des solutions est $\{\ln(3)\}$.

2. Soit $x \in \mathbf{R}$. On peut diviser par $e^x > 0$:

$$\begin{aligned} (3x + 1)e^x &= 0 \\ 3x + 1 &= 0 \\ x &= -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions est $\left\{ -\frac{1}{3} \right\}$.

3. Soit $x \in \mathbf{R}$. On peut diviser par $e^x > 0$ comme avant (l'équation devient alors $2x - 1 = 1$ (et pas $2x - 1 = 0$, car $\frac{e^x}{e^x} = 1$) ou factoriser par e^x . Optons pour la deuxième méthode, pour changer.

$$\begin{aligned}(2x - 1)e^x &= e^x \\ (2x - 1)e^x - e^x &= 0 \\ (2x - 2)e^x &= 0 \\ 2x - 2 &= 0 \text{ ou } e^x = 0 \\ x &= 1\end{aligned}$$

car $e^x = 0$ est impossible. Finalement, l'ensemble des solutions est $\{1\}$.

4. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned}xe^{x+3} &= 2e^{x+3} \\ xe^{x+3} - 2e^{x+3} &= 0 \\ (x - 2)e^{x+3} &= 0 \\ x - 2 &= 0 \text{ ou } e^{x+3} = 0 \\ x &= 2.\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est $\{2\}$.

5. Soit $x \in \mathbf{R}$. Puisque $-e^{x^2+3} < 0$ et $\frac{1}{e^{x+3}}$, l'équation n'a pas de solution. Autrement dit, l'ensemble des solutions est \emptyset .
6. Soit $x \in \mathbf{R}$. Puisque $e^{4x} > 0$ et $e^x > 0$, l'équation n'a pas de solution. Autrement dit, l'ensemble des solutions est \emptyset .
7. Soit $x \in \mathbf{R}$. Posons $X = e^{3x}$. On a

$$\begin{aligned}e^{6x} - 4e^{3x} + 4 &= 0 \\ (e^{3x})^2 - 4e^{3x} + 4 &= 0 \\ X^2 - 4X + 4 &= 0 \\ (X - 2)^2 &= 0 \\ X - 2 &= 0 \\ X &= 2 \\ e^{3x} &= 2 \\ 3x &= \ln(2) \\ x &= \frac{\ln(2)}{3}.\end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions est $\left\{ \frac{\ln(2)}{3} \right\}$.

8. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned}9e^{-2x} - 6 + e^{2x} &= 0 \\ \frac{9}{e^{2x}} - 6 + e^{2x} &= 0 \\ 9 - 6e^{2x} + e^{4x} &= 0 \\ (e^{2x})^2 - 6e^{2x} + 9 &= 0.\end{aligned}$$

Posons $X = e^{2x}$. On a

$$\begin{aligned} 9e^{-2x} - 6 + e^{2x} &= 0 \\ X^2 - 6X + 9 &= 0 \\ (X - 3)^2 &= 0 \\ X &= 3 \\ e^{2x} &= 3 \\ 2x &= \ln(3) \\ x &= \frac{\ln(3)}{2}. \end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions est $\left\{ \frac{\ln(3)}{2} \right\}$.

9. Soit $x \in \mathbf{R}$. On a, en multipliant par e^x ,

$$\begin{aligned} e^x - 3 + 2e^{-x} &= 0 \\ e^{2x} - 3e^x + 2 &= 0 \\ (e^x)^2 - 3e^x + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Posons $X = e^x$. On a alors

$$\begin{aligned} e^x - 3 + 2e^{-x} &= 0 \\ X^2 - 3X + 2 &= 0. \end{aligned}$$

Le discriminant de ce trinôme est $(-3)^2 - 4 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$ et ses racines sont $\frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 - 1}{2} = 1$ et $\frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 + 1}{2} = 2$. Ainsi,

$$\begin{aligned} e^x - 3 + 2e^{-x} &= 0 \\ X &= 1 \text{ ou } X = 2 \\ e^x &= 1 \text{ ou } e^x = 2 \\ x &= 0 \text{ ou } x = \ln(2). \end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions est $\{0, \ln(2)\}$.

Éléments de correction - Exercice 54

1. $\ln(1 + 3x)$ existe si et seulement si $1 + 3x > 0$ c'est-à-dire $x > -\frac{1}{3}$.

$\ln(x + 1)$ existe si et seulement si $1 + x > 0$ c'est-à-dire $x > -1$.

Finalement, le domaine de définition de l'équation est $D = \left] -\frac{1}{3}; +\infty[\cap \left] -1; +\infty[= \left] -\frac{1}{3}; +\infty[$.

Soit $x \in D$.

$$\begin{aligned} \ln(1 + 3x) &= \ln(x + 1) \\ 1 + 3x &= x + 1 \\ 2x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Puisque $0 \in D$, l'ensemble des solutions de l'équation est $\{0\}$.

2. $\ln(2x + 1)$ existe si et seulement si $2x + 1 > 0$, c'est-à-dire $x > -\frac{1}{2}$.

$\ln(x^2 - 1)$ existe si et seulement si $x^2 - 1 > 0$, c'est-à-dire $(x - 1)(x + 1) > 0$, donc pour $x < -1$ ou $x > 1$ (on a un trinôme dont le coefficient dominant est positif, donc il est positif sauf entre ses racines).

Donc le domaine de définition de l'équation est $D = \left] -\frac{1}{2}; +\infty[\cap \left(\left] -\infty; -1[\cup \right] 1; +\infty[\right) =$

$]1; +\infty[$.
Soit $x \in D$. On a

$$\begin{aligned}\ln(2x + 1) &= \ln(x^2 - 1) \\ 2x + 1 &= x^2 - 1 \\ x^2 - 2x - 2 &= 0.\end{aligned}$$

Le discriminant du trinôme obtenu est 12, donc ses racines sont $1 - \sqrt{3}$ et $1 + \sqrt{3}$ (on a utilisé $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ pour simplifier le résultat obtenu avec les formules sur les trinômes). Il reste à vérifier si ces racines sont dans D . On a $1 - \sqrt{3} \leq 1$, donc $1 - \sqrt{3} \notin D$. De plus, $1 + \sqrt{3} > 1$, donc $1 + \sqrt{3} \in D$. Finalement, l'unique solution de l'équation est $\{1 + \sqrt{3}\}$.

3. $\ln(x - 3)$ existe si et seulement si $x - 3 > 0$, c'est-à-dire $x > 3$. Le domaine de définition de l'équation est donc $D =]3; +\infty[$.
Soit $x \in D$.

$$\begin{aligned}\ln(x - 3) - 1 &= 0 \\ \ln(x - 3) &= 1 \\ x - 3 &= e^1 \\ x &= 3 + e\end{aligned}$$

Or $3 + e > 3$, donc $3 + e \in D$. Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation est $\{3 + e\}$.

4. $\ln(x)$ existe si et seulement si $x > 0$.
 $\ln(x - 1)$ existe si et seulement si $x - 1 > 0$, c'est-à-dire $x > 1$.
Donc le domaine de définition de l'équation est $D =]0; +\infty[\cap]1; +\infty[=]1; +\infty[$.
Soit $x \in D$.

$$\begin{aligned}\ln(x) + \ln(x - 1) &= 0 \\ \ln(x(x - 1)) &= 0 \\ x(x - 1) &= e^0 \\ x^2 - x &= 1 \\ x^2 - x - 1 &= 0\end{aligned}$$

Or le discriminant du trinôme obtenu vaut 5, donc ses racines sont $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. D'après l'indication, la première n'appartient pas à D tandis que la seconde si. Ainsi, l'ensemble des solutions est $\left\{ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right\}$.

5. $\ln(4 - x)$ existe si et seulement si $4 - x > 0$, c'est-à-dire $x < 4$. Ainsi, le domaine de définition de l'équation est $D =]-\infty; 4[$.
Soit $x \in D$.

$$\begin{aligned}\ln(4 - x) &= 0 \\ 4 - x &= e^0 \\ 4 - x &= 1 \\ x &= 3\end{aligned}$$

Or $3 \in D$, donc l'ensemble des solutions de l'équation est $\{3\}$.

6. $\ln(x)$ existe si et seulement si $x > 0$. De plus, $\ln(1 - x)$ existe si et seulement si $1 - x > 0$, c'est-à-dire $x < 1$. Ainsi, l'ensemble de définition de l'équation est $D =]0; +\infty[\cap]-\infty; 1[=]0; 1[$.

Soit $x \in D$.

$$\begin{aligned}\ln(x) - \ln(1-x) &= \ln(2) \\ \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) &= \ln(2) \\ \frac{x}{1-x} &= 2 \\ x &= 2(1-x) \\ x &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Or $\frac{2}{3} \in D$, donc l'ensemble des solutions est $\left\{\frac{2}{3}\right\}$.

7. $\ln(2x+1)$ existe si et seulement si $x > -\frac{1}{2}$, $\ln(x-3)$ existe si et seulement si $x > 3$ et $\ln(x+5)$ existe si et seulement si $x > -5$. Donc l'ensemble de définition de l'équation est $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[\cap]3; +\infty[\cap]-5; +\infty[=]3; +\infty[$.
Soit $x \in D$.

$$\begin{aligned}\ln(2x+1) + \ln(x-3) &= \ln(x+5) \\ \ln((2x+1)(x-3)) &= \ln(x+5) \\ (2x+1)(x-3) &= x+5 \\ 2x^2 - 5x - 3 &= x+5 \\ 2x^2 - 6x - 8 &= 0 \\ x^2 - 3x - 4 &= 0\end{aligned}$$

Le discriminant du trinôme obtenu est 25, donc ses racines sont -1 et 4 . Or $-1 \notin D$ et $4 \in D$. Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation est $\{4\}$.

8. $\ln(x-1)$ existe si et seulement si $x > 1$, $\ln(2-x)$ existe si et seulement si $x < 2$ et $\ln(6x)$ existe si et seulement si $x > 0$. Ainsi, le domaine de définition de l'équation est $D =]1; +\infty[\cap]-\infty; 2[\cap]0; +\infty[=]1; 2[$.
Soit $x \in D$.

$$\begin{aligned}\ln(x-1) + \ln(2-x) &= \ln(6x) \\ \ln((x-1)(2-x)) &= \ln(6x) \\ (x-1)(2-x) &= 6x \\ -x^2 + 3x - 2 &= 6x \\ -x^2 - 3x - 2 &= 0\end{aligned}$$

Le discriminant du trinôme obtenu est 1, donc ses racines sont -2 et -1 . Or $-2 \notin D$, $-1 \notin D$, donc l'équation n'admet pas de solution.

9. $\ln(x-2)$ existe si et seulement si $x > 2$. $\ln(x)$ existe si et seulement si $x > 0$. Donc l'ensemble de définition de l'équation est $D =]0; +\infty[\cap]2; +\infty[=]2; +\infty[$.
Soit $x \in D$.

$$\begin{aligned}\ln(x-2) + \ln(x) &= \ln(3) \\ \ln((x-2)x) &= \ln(3) \\ (x-2)x &= 3 \\ x^2 - 2x - 3 &= 0\end{aligned}$$

Le discriminant du trinôme obtenu est 16, donc ses racines sont -1 et 3 . Or $-1 \notin D$ et $3 \in D$, donc l'ensemble des solutions de l'équation est $\{3\}$.

10. $\ln(x(x-2))$ existe si et seulement si $x(x-2) > 0$. Or,

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
x		$-$	$+$	$+$
$x - 2$		$-$	$-$	$+$
$x(x - 2)$		$+$	$-$	$+$

Donc $D =]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$.

Soit $x \in D$. Les calculs à faire sont les mêmes qu'à la question précédente, on obtient comme solutions potentielles -1 et 3 . Or $-1 \in D$ et $3 \in D$, donc l'ensemble des solutions est $\{-1, 3\}$.

Notons que les calculs pour déterminer les solutions pour cette question sont les mêmes que pour la question précédente. Pourtant les ensembles de définition des équations sont distincts, les ensembles de solutions aussi.

11. $\ln(x^2 + 5x + 6)$ existe si et seulement si $x^2 + 5x + 6 > 0$. Le discriminant du trinôme est 1, donc ses racines sont -3 et -2 , donc il est strictement positif sur $]-\infty; -3[\cup]-2; +\infty[$ (on rappelle qu'un polynôme est du signe de son coefficient sauf entre ses racines). De plus $\ln(x + 11)$ existe si et seulement si $x > -11$, donc l'ensemble de définition de l'équation est $D =]-11; +\infty[\cap (]-\infty; -3[\cup]-2; +\infty[) =]-11; -3[\cup]-2; +\infty[$.
Soit $x \in D$.

$$\begin{aligned}\ln(x^2 + 5x + 6) &= \ln(x + 11) \\ x^2 + 5x + 6 &= x + 11 \\ x^2 + 4x - 5 &= 0\end{aligned}$$

Le discriminant du trinôme est 36, ses racines sont -5 et 1 . Or $-5 \in D$, $1 \in D$, donc l'ensemble des solutions de l'équation est $\{-5, 1\}$.

12. Le domaine de définition de l'équation est $D =]0; +\infty[$. Soit $x \in D$. Posons $X = \ln(x)$. L'équation proposée se réécrit $2X^2 + 3X - 2 = 0$. Le discriminant de ce trinôme est 25, ses racines sont -2 et $\frac{1}{2}$, donc

$$\begin{aligned}2\ln(x)^2 + 3\ln(x) - 2 &= 0 \\ 2X^2 + 3X - 2 &= 0 \\ X &= -2 \text{ ou } X = \frac{1}{2} \\ \ln(x) &= -2 \text{ ou } \ln(x) = \frac{1}{2} \\ x &= e^{-2} \text{ ou } x = e^{\frac{1}{2}} \\ x &= \frac{1}{e^2} \text{ ou } x = \sqrt{e}\end{aligned}$$

Les deux valeurs obtenues appartiennent à D , donc l'ensemble des solutions est $\left\{\frac{1}{e^2}, \sqrt{e}\right\}$.

Éléments de correction - Exercice 55

1. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned}e^{2x} &> e^{-2} \\ 2x &> -2 \\ x &> \frac{-2}{2} \\ x &> -1.\end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions est $]-1; +\infty[$.

2. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} e^{-3x} &< e \\ e^{-3x} &< e^1 \\ -3x &< 1 \\ x &> \frac{-1}{3}. \end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions est $\left] -\frac{1}{3}; +\infty \right[$.

3. L'équation n'admet pas de solution car exponentielle ne prend que des valeurs strictement positives. Ainsi, l'ensemble des solutions est \emptyset .

4. L'équation admet tous les réels comme solution puisque la fonction exponentielle ne prend que des valeurs strictement positives. Donc l'ensemble des solutions est \mathbf{R} .

5. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} e^{3x-5} &\geq 3 \\ 3x - 5 &\geq \ln(3) \\ 3x &\geq \ln(3) + 5 \\ x &\geq \frac{\ln(3) + 5}{3}. \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est $\left[\frac{\ln(3) + 5}{3}; +\infty \right[$.

6. Tous les réels sont solutions de l'équation car exponentielle ne prend que des valeurs strictement positives. Autrement dit, l'ensemble des solutions est \mathbf{R} .

7. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} e^{-2x-1} &\leq 1 \\ -2x - 1 &\leq \ln(1) \\ -2x - 1 &\leq 0 \\ -2x &\leq 1 \\ x &\geq \frac{1}{-2}. \end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions est $\left[-\frac{1}{2}; +\infty \right[$.

8. La fonction exponentielle ne prend que des valeurs strictement positives, donc l'ensemble des solutions est \emptyset .

Éléments de correction - Exercice 56

1. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} e^{x+1} &< 1 \\ x + 1 &< \ln(1) \\ x + 1 &< 0 \\ x &< -1. \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est $] -\infty; -1[$.

2. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} -3e^{x^2-4} &> 4 \\ e^{x^2-4} &< \frac{4}{-3} \quad (\text{on divise par un nombre négatif, le sens de l'inégalité change!}) \end{aligned}$$

Or la fonction exponentielle ne prend que des valeurs strictement positives, donc l'inéquation précédente n'est jamais vérifiée. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'inéquation est \emptyset .

3. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} e^{x+4} &\leq \frac{1}{e^{3x}} \\ e^{x+4}e^{3x} &\leq 0 \end{aligned}$$

Or la fonction exponentielle ne prend que des valeurs strictement positives, donc l'inéquation précédente n'est jamais vérifiée. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'inéquation est \emptyset .

4. Soit $x \in \mathbf{R}$. Puisque $e^x > 0$, on peut diviser l'inéquation par e^x , d'où

$$\begin{aligned} (x-1)e^x &> 0 \\ x-1 &> 0 \\ x &> 1. \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation est $]1; +\infty[$.

$$\begin{aligned} (-2x+3)e^x &< 0 \\ -2x+3 &< 0 \\ -2x &< -3 \\ x &> \frac{-3}{-2}. \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation est $\left] \frac{3}{2}; +\infty \right[$.

5. Soit $x \in \mathbf{R}$. Puisque $e^{-2x+5} > 0$, on peut diviser l'inéquation par e^{-2x+5} , d'où

$$\begin{aligned} x^2e^{-2x+5} &> 0 \\ x^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Or un carré est toujours positif, donc l'inéquation est toujours vérifiée. Ainsi, l'ensemble des solutions est \mathbf{R} .

6. Soit $x \in \mathbf{R}$. Puisque $e^x > 0$, on peut multiplier par e^x , donc

$$\begin{aligned} \frac{x-4}{e^x} &\leq 0 \\ x-4 &\leq 0 \\ x &\leq 4. \end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble des solutions est $]-\infty; 4]$.

7. Soit $x \in \mathbf{R}$. En posant $X = e^x$, l'inéquation se ramène à $X^2 - 7X + 12 > 0$. Les racines du trinôme obtenu sont 4 et 3 (on les obtient en calculant le discriminant puis en appliquant les formules usuelles sur les trinômes). Puisqu'un trinôme est du signe de son coefficient dominant (ici 1, positif) sauf entre ses racines, on en déduit que $X^2 - 7X + 12$ est strictement positif si et seulement si $X < 3$ ou $X > 4$. Or $e^x < 3$ si et seulement si $x < \ln(3)$ et $e^x > 4$ si et seulement si $x > \ln(4)$. Finalement, l'ensemble des solutions est $]-\infty; \ln(3)[\cup]\ln(4); +\infty[$.

8. Soit $x \in \mathbf{R}$. En posant $X = e^x$, l'inéquation se ramène à $X^2 + X - 6 > 0$. Les racines du trinôme obtenu sont 2 et -3 (on les obtient en calculant le discriminant puis en appliquant les formules usuelles sur les trinômes). Puisqu'un trinôme est du signe de son coefficient dominant (ici 1, positif) sauf entre ses racines, on en déduit que $X^2 + X - 6$ est strictement positif si et seulement si $X < -3$ ou $X > 2$. Or $e^x < -3$ n'admet pas de solution (car la fonction exponentielle ne prend que des valeurs strictement positives) et $e^x > 2$ si et seulement si $x > \ln(2)$. Finalement, l'ensemble des solutions est $\emptyset \cup]\ln(2); +\infty[=]\ln(2); +\infty[$.

1. $\ln(x)$ existe si et seulement si $x > 0$, donc le domaine de définition de l'inéquation est $D =]0; +\infty[$.
Soit $x \in D$.

$$\begin{aligned} \ln(x) &\leq 3 \\ x &\leq e^3 \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est $D \cap]-\infty; 3] =]0; 3]$.

2. $\ln(x)$ existe si et seulement si $x > 0$, donc le domaine de définition de l'inéquation est $D =]0; +\infty[$.
Soit $x \in D$.

$$\begin{aligned} \ln(x) &> e \\ x &> e^e \end{aligned}$$

Or $e^e > 0$ (car la fonction exponentielle ne prend que des valeurs strictement positives). Donc l'ensemble des solutions est $D \cap]e^e; +\infty[=]e^e; +\infty[$.

3. $\ln(2x - 1)$ existe si et seulement si $2x - 1 > 0$, à savoir $x > \frac{1}{2}$. Ainsi, le domaine de définition de l'inéquation est $D = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$.
Soit $x \in D$.

$$\begin{aligned} \ln(2x - 1) &> -1 \\ 2x - 1 &> e^{-1} \\ x &> \frac{e^{(-1)} + 1}{2} \end{aligned}$$

Puisque $e^{-1} > 0$, on obtient que $\frac{e^{-1}}{2} > 0$, donc $\frac{e^{-1}}{2} + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'inéquation est $D \cap \left] \frac{e^{(-1)} + 1}{2}; +\infty \right[= \left] \frac{e^{(-1)} + 1}{2}; +\infty \right[$.

4. $\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$ existe si et seulement si $1 + \frac{2}{x} > 0$, à savoir $\frac{x+2}{x} > 0$. Or,

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$x + 2$		-	0	+
x		-	0	+
$\frac{x + 2}{x}$		+	0	+

Donc l'ensemble de définition de l'inéquation est $D =]-\infty; -2[\cup]0; +\infty[$.
Soit $x \in D$.

$$\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) \geq \ln(3)$$

$$\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) \geq \ln(3)$$

$$\frac{x+2}{x} \geq 3$$

$$\frac{x+2}{x} - 3 \geq 0$$

$$\frac{2+x-3x}{x} \geq 0$$

$$\frac{2-2x}{x} \geq 0$$

$$\frac{1-x}{x} \geq 0$$

en divisant par 2

Or,

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$1-x$		+	0	-
x		-	+	+
$\frac{1-x}{x}$		-	+	0

Donc l'ensemble des solutions est $]0; 1] \cap D =]0; 1]$.

Notons qu'on ne pas transformer $\frac{x+2}{x} \geq 3$ en $x+2 \geq 3x$, car on multiplie par x l'inéquation mais on ne connaît pas son signe (on ne sait donc pas s'il faut changer ou non le sens de l'inéquation!)

5. $\ln(x)$ existe si et seulement si $x > 0$, $\ln(x^2 - 2x)$ existe si et seulement si $x^2 - 2x > 0$. Or $x^2 - 2x = x(x - 2)$, donc les racines de ce trinôme sont 0 et 2. Or un trinôme est du signe de son coefficient dominant sauf entre ses racines, donc $x^2 - 2x > 0$ si et seulement si $x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$. Ainsi, le domaine de définition de D est l'intersection des deux ensembles obtenus, à savoir $D =]2; +\infty[$.

Soit $x \in D$.

$$\begin{aligned} \ln(x) &\leq \ln(x^2 - 2x) \\ x &\leq x^2 - 2x \\ x^2 - 3x &\geq 0 \\ x(x - 3) &\geq 0 \end{aligned}$$

Or,

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
x		-	0	+
$x-3$		-	0	+
$x(x-3)$		+	0	-

On aurait aussi pu utiliser, de manière plus rapide, que les racines de ce trinôme sont 0 et 3 pour en déduire immédiatement son signe.

Donc l'ensemble des solutions est $D \cap [3; +\infty[= [3; +\infty[$.

6. Le domaine de définition de l'inéquation est $D =]-2; +\infty[$.
Soit $x \in D$.

$$\begin{aligned} \ln(x+2) &\geq 0 \\ x+2 &\geq e^0 \\ x+2 &\geq 1 \\ x &\geq -1 \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est $D \cap [-1; +\infty[= [-1; +\infty[$.

7. Le domaine de définition de l'inéquation est $D =]1; +\infty[$.
Soit $x \in D$.

$$\begin{aligned} \ln(x-1) &< 0 \\ x-1 &< 1 \\ x &< 2 \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est $D \cap]-\infty; 2[=]1; 2[$.

8. Le domaine de définition de l'inéquation est $D =]-1; +\infty[$.
Soit $x \in D$.

$$\begin{aligned} 2 \ln(x+1) &\leq 0 \\ \ln(x+1) &\leq 0 && \text{on divise par } 2 > 0 \\ x+1 &\leq 1 \\ x &\leq 0 \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est $D \cap]-\infty; 0] =]-1; 0]$.

9. Le domaine de définition de l'inéquation est $D =]0; +\infty[$.
Soit $x \in D$.

$$\begin{aligned} 2\ln(x) + 1 &\geq 0 \\ 2\ln(x) &\geq -1 \\ \ln(x) &\geq -\frac{1}{2} \\ x &\geq e^{-1/2} \\ x &\geq \frac{1}{\sqrt{e}} \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solution est $D \cap \left[\frac{1}{\sqrt{e}}; +\infty \right[= \left[\frac{1}{\sqrt{e}}; +\infty \right[$ car $\frac{1}{\sqrt{e}} > 0$.

10. Le domaine de définition est $D =]-4; +\infty[$.
Soit $x \in D$.

$$\begin{aligned} \ln(x + 4) &\geq 0 \\ x + 4 &\geq 1 \\ x &\geq -3 \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est $D \cap [-3; +\infty[= [-3; +\infty[$.

11. Le domaine de définition de l'inéquation est $D =]0; +\infty[$. On a une inéquation produit, on cherche donc le signe de chaque facteur.

$$\begin{aligned} \ln(x) &\geq 0 \\ x &\geq 1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 2 - \ln(x) &\geq 0 \\ \ln(x) &\leq 2 \\ x &\leq e^2 \end{aligned}$$

Ainsi, les deux résolutions précédentes nous informent où mettre les « + » dans le tableau de signe suivant :

x	0	1	e^2	$+\infty$		
$\ln(x)$		-	0	+	+	
$2 - \ln(x)$		+	0	+	-	
$\ln(x)(2 - \ln(x))$		-	0	+	0	-

Donc l'ensemble des solutions est $[1; e^2]$.

12. Le domaine de définition de l'inéquation est $D =]0; +\infty[$. Soit $x \in D$. Posons $X = \ln(x)$. On a :

$$\begin{aligned} \ln(x)^2 + 4\ln(x) + 4 &\geq 0 \\ X^2 + 4X + 4 &\geq 0 \\ (X + 2)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

On obtient une inéquation toujours vraie, donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est D .

Éléments de correction - Exercice 58

Dans cet exercice, on cherche souvent le signe de $\ln(a)$, où $a > 0$. On rappelle que $\ln(a) < 0$ si et seulement si $a \in]0; 1[$ et $\ln(a) > 0$ si et seulement si $a > 1$.

1. Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$\begin{aligned} 3^n &> 125 \\ \ln(3^n) &> \ln(125) \\ n \ln(3) &> \ln(5^3) \\ n &> \frac{3 \ln(5)}{\ln(3)} && \text{car } \ln(3) > 0 \end{aligned}$$

Donc l'entier n cherché est le premier entier strictement supérieur à $\frac{3 \ln(5)}{\ln(3)}$.

Attention, l'inconnue est ici un nombre entier. Le nombre $\frac{3 \ln(5)}{\ln(3)}$ n'étant pas entier, il n'est pas la solution du problème.

2. Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$\begin{aligned} 5^n &\geq 10\,000 \\ \ln(5^n) &\geq \ln(10^4) \\ n \ln(5) &\geq 4 \ln(10) \\ n &\geq \frac{4 \ln(2 \times 5)}{\ln(5)} && \text{car } \ln(5) > 0 \\ n &\geq \frac{4 \ln(2)}{\ln(5)} + 4. \end{aligned}$$

Donc l'entier n cherché est le premier entier supérieur ou égal à $\frac{4 \ln(2)}{\ln(5)} + 4$.

3. Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$\begin{aligned} 0,5^n &< 0,01 \\ n \ln(0,5) &< \ln(10^{-2}) \\ -n \ln(2) &< -2 \ln(10) \\ n &> \frac{2 \ln(10)}{\ln(2)} && \text{car } -\ln(2) < 0 \\ n &> \frac{2 \ln(5)}{\ln(2)} + 2. \end{aligned}$$

Donc l'entier n cherché est le premier entier strictement supérieur à $\frac{2 \ln(5)}{\ln(2)} + 2$.

4. Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3}\right)^n &\leq 10^{-4} \\ n \ln\left(\frac{2}{3}\right) &\leq -4 \ln(10) \\ n &\geq \frac{-4 \ln(10)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} && \text{car } \ln\left(\frac{2}{3}\right) < 0 \\ n &\geq \frac{-4 \ln(10)}{\ln(2) - \ln(3)} && \geq \frac{4 \ln(10)}{\ln(3) - \ln(2)}. \end{aligned}$$

Donc l'entier n cherché est le premier entier supérieur ou égal à $\frac{4 \ln(10)}{\ln(3) - \ln(2)}$.

5. Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$\begin{aligned}
 2^{n-6} &> 100 \\
 (n-6) \ln(2) &> \ln(10^2) \\
 n \ln(2) &> 2 \ln(10) + 6 \ln(2) \\
 n &> \frac{2 \ln(10)}{\ln(2)} + 6 && \text{car } \ln(2) > 0 \\
 n &> 2 + \frac{2 \ln(5)}{\ln(2)} + 6 \\
 n &> 8 + \frac{2 \ln(5)}{\ln(2)}
 \end{aligned}$$

Donc l'entier n cherché est le premier entier strictement supérieur à $8 + \frac{2 \ln(5)}{\ln(2)}$.

6. Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$\begin{aligned}
 0,8^n &\leq 0,05 \\
 n \ln(0,8) &\leq \ln(0,05) \\
 n &\geq \frac{\ln(0,05)}{\ln(0,8)} && \text{car } \ln(0,8) < 0 \\
 n &\geq \frac{\ln(\frac{1}{20})}{\ln(\frac{4}{5})} \\
 n &\geq \frac{-\ln(20)}{\ln(4) - \ln(5)}
 \end{aligned}$$

Donc l'entier n cherché est le premier entier supérieur ou égal à $\frac{\ln(20)}{\ln(5) - \ln(4)}$.

7. Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$\begin{aligned}
 1 - 0,3^n &> 0,95 \\
 -0,3^n &> \frac{19}{20} - 1 \\
 0,3^n &< \frac{1}{20} && \text{car } -1 < 0 \\
 n \ln\left(\frac{3}{10}\right) &< \ln\left(\frac{1}{20}\right) \\
 n &> \frac{-\ln(20)}{\ln(3) - \ln(10)} && \text{car } \ln\left(\frac{3}{10}\right) < 0 \\
 n &> \frac{\ln(20)}{\ln(10) - \ln(3)}
 \end{aligned}$$

Attention, \ln est définie sur \mathbf{R}_+^ , donc il est faux de composer directement $-0,3^n$ par \ln .*

Donc l'entier n cherché est le premier entier strictement supérieur à $\frac{\ln(20)}{\ln(10) - \ln(3)}$.

8. Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$\begin{aligned}
 \frac{4^n}{5^{n-1}} &< 1 \\
 \left(\frac{4}{5}\right)^n \frac{1}{5} &< 1 \\
 \left(\frac{4}{5}\right)^n &< 5 && \text{car } 5 > 0 \\
 n \ln\left(\frac{4}{5}\right) &< \ln(5) \\
 n &> \frac{\ln(5)}{\ln(4) - \ln(5)}.
 \end{aligned}$$

Donc l'entier n cherché est le premier entier strictement supérieur à $\frac{\ln(5)}{\ln(4) - \ln(5)}$.

Éléments de correction - Exercice 59

- $\frac{2^3 \cdot 3^2}{3^4 \cdot 2^8 \cdot 6^{-1}} = \frac{2^3 \cdot 3^2}{3^4 \cdot 2^8 \cdot 2^{-1} \cdot 3^{-1}} = \frac{2^3 \cdot 3^2}{3^{4-1} \cdot 2^{8-1}} = \frac{2^3 \cdot 3^2}{3^3 \cdot 2^7} = 2^{3-7} \cdot 3^{2-3} = 2^{-4} \cdot 3^{-1}$.
- On factorise par 2^{21} : $2^{21} + 2^{22} = 1 \cdot 2^{21} + 2 \cdot 2^{21} = 2^{21} \cdot (1 + 2) = 2^{21} \cdot 3$.
- On factorise au numérateur et au dénominateur : $\frac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}} = \frac{(3+1) \cdot 3^{21}}{(3-1) \cdot 3^{21}} = \frac{4}{2} = 2$.
- On simplifie avec les règles usuelles et on utilise que $(-a)^n = a^n$ si a est pair :

$$\frac{(3^2 \cdot (-2)^4)^8}{((-3)^5 \cdot 2^3)^{-2}} = \frac{3^{16} \cdot 2^{32}}{3^{-10} \cdot 2^{-6}} = 2^{38} \cdot 3^{26}.$$

12.8 Dérivation

Éléments de correction - Exercice 60

colorbleu Il est conseillé de débiter les calculs de dérivées en prenant le temps d'écrire les formules, d'identifier les fonctions, les réels utilisés, comme dans les dix premiers corrigés ci-dessous.

- $f(x) = x \ln(x) = u(x)v(x)$ avec $u(x) = x$, $u'(x) = 1$ et $v(x) = \ln(x)$, $v'(x) = \frac{1}{x}$ donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ &= \ln(x) + \frac{x}{x} \\ &= \ln(x) + 1 \end{aligned}$$

- $f(x) = \frac{e^x}{x} = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = e^x$, $u'(x) = e^x$ et $v(x) = x$, $v'(x) = 1$ donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{xe^x - e^x}{x^2} \\ &= \frac{(x-1)e^x}{x^2} \end{aligned}$$

- $f(x) = \ln(x^2 + 1) = \ln(u(x))$ avec $u(x) = x^2 + 1$, $u'(x) = 2x$ donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)}{u(x)} \\ &= \frac{2x}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

- $f(x) = e^{x^2+x+1} = e^{u(x)}$ avec $u(x) = x^2 + x + 1$, $u'(x) = 2x + 1$ donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)e^{u(x)} \\ &= (2x + 1)e^{x^2+x+1} \end{aligned}$$

- $f(x) = (2x - 1)^2 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 1 + 1^2 = 4x^2 - 4x + 1$ donc $f'(x) = 8x - 4$.

- $f(x) = \frac{x^2 - 5}{x^2 + 1} = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = x^2 - 5$, $u'(x) = 2x$ et $v(x) = x^2 + 1$, $v'(x) = 2x$ donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(x^2 + 1) - 2x(x^2 - 5)}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{2x^3 + 2x - 2x^3 + 10x}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{12x}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

7. $f(x) = \ln(e^x + 1) = \ln(u(x))$ avec $u(x) = e^x + 1, u'(x) = e^x$ donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)}{u(x)} \\ &= \frac{e^x}{e^x + 1} \end{aligned}$$

8. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = x, u'(x) = 1$ et $v(x) = x^2 + 1, v'(x) = 2x$ donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^2 + 1) - x(2x)}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

9. $f(x) = \frac{1}{\ln(x)} = \frac{1}{u(x)}$ avec $u(x) = \ln(x), u'(x) = \frac{1}{x}$ donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} \\ &= \frac{-1}{x(\ln(x))^2} \end{aligned}$$

10. $f(x) = (e^{2x} + 1)^8 = (u(x))^8$ avec $u(x) = e^{2x} + 1, u'(x) = 2e^{2x}$. En effet, la dérivée de la fonction $x \mapsto e^{2x} = e^{v(x)}$ avec $v'(x) = 2x, v'(x) = 2$ est la fonction $x \mapsto v'(x)e^{v(x)} = 2e^{2x}$. D'où :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 8u'(x)(u(x))^7 \\ &= 16e^{2x}(e^{2x} + 1)^7 \end{aligned}$$

11. $f(x) = (x + 2) \ln(x^4 + 1)$

$$f'(x) = \ln(x^4 + 1) + (x + 2) \frac{4x^3}{x^4 + 1}$$

12. $f(x) = (3e^{5x} + 1)^7$

$$f'(x) = 7 \times 3 \times 5e^{5x}(3e^{5x} + 1)^6.$$

13. $f(x) = \frac{1}{2x + 5} - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2}$.

$$f'(x) = \frac{-2}{(2x + 5)^2} - \frac{2 \times (-3)}{x^4} + \frac{-2}{x^3} = \frac{-2}{(2x + 5)^2} + \frac{6}{x^4} - \frac{2}{x^3}$$

14. $f(x) = (1 + \ln(x))^3$

$$f'(x) = 3 \times \frac{1}{x} \times (1 + \ln(x))^2 = \frac{3}{x}(1 + \ln(x))^2$$

15. $f(x) = e^{\frac{1}{x-4}}$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-4)^2} e^{\frac{1}{x-4}}$$

Éléments de correction - Exercice 61

1. $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right)$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a}{x^2} \right)$$

2. $f(x) = \ln(3 + e^{ax})$

$$f'(x) = \frac{ae^{ax}}{3 + e^{ax}}$$

3. $f(x) = (ax + 1)^7$

$$f'(x) = 7a(ax + 1)^6$$

4. $f(x) = \frac{x-a}{x+a}$
 $f'(x) = \frac{x+a - (x-a)}{(x+a)^2} = \frac{2a}{(x+a)^2}$
5. $f(x) = \frac{2}{(ax+1)^5}$
 $f'(x) = \frac{2 \times -5a}{(ax+1)^6} = \frac{-10a}{(ax+1)^6}$
6. $f(x) = x^3 + 2ax^2 - 1$
 $f'(x) = 3x^2 + 4ax$
7. $f(x) = \ln(\ln(ax))$
 $f'(x) = \frac{1}{x \ln(ax)}$
8. $f(x) = e^{ax^2}$
 $f'(x) = 2axe^{ax^2}$
9. $f(x) = (e^{ax} + 1)^5$
 $f'(x) = 5ae^{ax}(e^{ax} + 1)^4$

Éléments de correction - Exercice 62

- La fonction exponentielle est dérivable sur \mathbb{R} donc f_K est dérivable sur \mathbb{R} . Pour tout réel x , $f'_K(x) = Kae^{ax} = aKe^{ax} = af_K(x)$. Ainsi, f_K appartient à \mathcal{F} .
- Comme g appartient à \mathcal{F} , g est dérivable sur \mathbb{R} . La fonction p est donc un quotient de fonctions dérivables avec la fonction au dénominateur ne s'annulant jamais donc p est dérivable sur \mathbb{R} . Pour tout réel x , on a :

$$\begin{aligned} p'(x) &= \frac{g'(x)e^{ax} - g(x)ae^{ax}}{(e^{ax})^2} \text{ formules de dérivation d'un produit et d'une composée} \\ &= \frac{ag(x)e^{ax} - g(x)ae^{ax}}{(e^{ax})^2} \text{ car } g \text{ appartient à } \mathcal{F} \text{ donc vérifie } g' = ag \\ &= 0 \end{aligned}$$

Comme $p' = 0$ sur l'intervalle \mathbb{R} , on en déduit qu'il existe une constante K réelle telle que pour tout réel x , $p(x) = K$ c'est à dire $\frac{g(x)}{e^{ax}} = K$ d'où $g(x) = Ke^{ax}$.

- On a montré que toute fonction de la forme $x \mapsto Ke^{ax}$ où K est un réel, appartient à \mathcal{F} et que, réciproquement, toute fonction appartenant à \mathcal{F} est nécessairement de la forme $x \mapsto Ke^{ax}$ où K est un réel. Ainsi :

$$\mathcal{F} = \{x \mapsto Ke^{ax} \text{ où } K \text{ est un réel } \}.$$

Éléments de correction - Exercice 63

- $f(x) = (x^3 - 1)^4$
 $f'(x) = 4 \times 3x^2 \times (x^3 - 1)^3 = 12x^2(x^3 - 1)^3$.
- $f(x) = \ln(x) - \frac{1}{x}$
 $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{-1}{x^2} = \frac{x+1}{x^2}$.
- $f(x) = (x^2 + 1)e^{-x^2}$
 $f'(x) = 2xe^{-x^2} + (x^2 + 1)(-2x)e^{-x^2} = (1 - x^2 - 1)2xe^{-x^2} = -x^2 2xe^{-x^2}$
- $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
 $f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

5. $f(x) = e^{x \ln(x)}$
 $f'(x) = (\ln(x) + x \frac{1}{x})e^{x \ln(x)} = (\ln(x) + 1)e^{x \ln(x)}$.
6. $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
 $f'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{(e^x + e^{-x})^2}$
 $f'(x) = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$

Éléments de correction - Exercice 64

1. $f; x \mapsto x^3 - 3x + 1, a = 0$.
 Pour tout réel $x, f'(x) = 3x^2 - 3$ donc $f'(0) = -3$. De plus, $f(0) = 1$ donc l'équation réduite de la tangente au graphe de f en a est $y = -3(x - 0) + 1$ c'est à dire $y = -3x + 1$.
2. $f; x \mapsto \frac{x^2}{3x - 9}, a = 1$.
 Pour tout réel $x, f'(x) = \frac{2x(3x - 9) - 3x^2}{(3x - 9)^2}$ donc $f'(1) = \frac{-15}{36} = \frac{-5}{12}$. De plus, $f(1) = \frac{-1}{6}$ donc l'équation réduite de la tangente au graphe de f en a est $y = \frac{-5}{12}(x - 1) + \frac{-1}{6} = \frac{-5}{12}x + \frac{5}{12} + \frac{-2}{12}$ c'est à dire $y = \frac{-5}{12}x + \frac{1}{4}$.
3. $f; x \mapsto \frac{x + 1}{x - 1}, a = 2$.
 Pour tout réel $x, f'(x) = \frac{(x - 1) - (x + 1)}{(x - 1)^2} = \frac{-2}{(x - 1)^2}$ donc $f'(2) = -2$. De plus, $f(2) = 3$ donc l'équation réduite de la tangente au graphe de f en a est $y = -2(x - 2) + 3$ c'est à dire $y = -2x + 7$.
4. $f; x \mapsto x + 2 + \frac{4}{x - 2}, a = -2$.
 Pour tout réel $x, f'(x) = 1 - \frac{4}{(x - 2)^2}$ donc $f'(-2) = 1 - \frac{4}{16} = \frac{3}{4}$. De plus, $f(-2) = -1$ donc l'équation réduite de la tangente au graphe de f en a est $y = \frac{3}{4}(x - (-2)) + (-1) = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2} + (-1)$ c'est à dire $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$.

Éléments de correction - Exercice 65

Notons, tout d'abord, que le point $A(1; -1)$ appartient au graphe de f si et seulement si ses coordonnées vérifient $y = f(x)$ c'est à dire $-1 = f(1)$. On en déduit que $A(1; -1)$ appartient au graphe de f si et seulement si $-1 = a + 2 + b$ c'est à dire $a + b = -3$.

On sait que deux droites non verticales sont parallèles lorsqu'elles ont des coefficients directeurs égaux. Ainsi, chercher une tangente au graphe de f parallèle à la droite d'équation réduite $y = -4x$ revient à chercher une tangente dont le coefficient directeur est égal à -4 . Or, le coefficient directeur de la tangente au graphe de f en 1 est $f'(1) = 2a + 2$. On en déduit que $2a + 2 = -4$ d'où $a = -3$ et donc $b = 0$.

Éléments de correction - Exercice 66

Pour tout réel $x, f'(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}$ donc $f'(0) = 1$. Comme $f(0) = \ln(1) = 0$, on en déduit que l'équation réduite de la tangente en 0 au graphe de la fonction f est $y = x$.

Éléments de correction - Exercice 67

1. Pour tout réel $a, f'(a) = \frac{-1}{a^2} \neq 0$ donc \mathcal{T}_a n'est pas une droite parallèle à l'axe des abscisses. Elle coupe donc cet axe.

2. L'équation réduite de la tangente \mathcal{T}_a est donnée par $y = \frac{-1}{a^2}(x-a) + \frac{1}{a}$. Le point B pour abscisse $x_B = 0$ et appartient à \mathcal{T}_a donc son ordonnée est $y_B = \frac{-1}{a^2}(0-a) + \frac{1}{a} = \frac{2}{a}$ d'où $B\left(0; \frac{2}{a}\right)$. Le point A pour ordonnée $y_A = 0$ et appartient à \mathcal{T}_a donc son abscisse vérifie $0 = \frac{-1}{a^2}(x_A - a) + \frac{1}{a}$ d'où $x_A - a = \frac{-1}{a} \times (-a^2) = a$ et ainsi $A(2a; 0)$.
- Le milieu de $[AB]$ a donc pour coordonnées $\left(\frac{0+2a}{2}; \frac{\frac{2}{a}+0}{2}\right)$ c'est à dire $\left(a; \frac{1}{a}\right)$. C'est donc bien le point M qui a pour abscisse a et qui, appartenant au graphe de f , a pour ordonnée $\frac{1}{a}$.

Éléments de correction - Exercice 68

Pour tout réel x , $f'(x) = 2ax$ donc la pente de la tangente au graphe de f au point d'abscisse $x_1 + x_2$ est $f'(x_1 + x_2) = a(x_1 + x_2)$.
La pente de la droite joignant les points de coordonnées $A(x_1; ax_1^2)$ et $B(x_2; ax_2^2)$ est

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{ax_2^2 - ax_1^2}{x_2 - x_1} = a \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} = a(x_1 + x_2)$$

car $x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_1 + x_2)$. On retrouve la même pente que celle de la tangente au graphe de f au point d'abscisse $x_1 + x_2$: ces deux droites sont donc parallèles.

Éléments de correction - Exercice 69

- $A = \frac{4}{7} + \left(\frac{13}{28} - \frac{5}{14}\right) = \frac{4}{7} + \frac{13 - 2 \times 5}{28} = \frac{4}{7} - \frac{2}{28} = \frac{4 \times 4 + 3}{28} = \frac{19}{28}$.
- $B = 2 - \left(\frac{7}{15} - \frac{3}{10}\right) = 2 - \frac{7 \times 2 - 3 \times 3}{30} = 2 - \frac{5}{30} = 2 - \frac{1}{6} = \frac{2 \times 6 - 1}{6} = \frac{11}{6}$.
- $C = \frac{1}{3} - \left(\frac{5}{6} - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{3} - \frac{5 \times 2 - 3 \times 3}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{4 - 1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.
- $D = \frac{7a}{5} - \frac{2a}{5} = \frac{7a - 2a}{5} = \frac{5a}{5} = a$.
- $E = a - \frac{a}{5} = \frac{5a - a}{5} = \frac{4a}{5}$.
- $F = 2 + \frac{a}{b} - \frac{a}{3b} = \frac{2 \times 3b + 3a - a}{3b} = \frac{6b + 2a}{3b}$.

12.9 Variations d'une fonction

Éléments de correction - Exercice 70

1. La fonction f est dérivable sur \mathbf{R} et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = -2x + 4$. De plus, pour $x \in \mathbf{R}$,

$$f'(x) \geq 0 \iff -2x \geq -4 \iff x \leq 2 \quad \text{et} \quad f'(x) = 0 \iff x = 2.$$

Notons qu'on résout une inéquation pour savoir où placer les signes dans le tableau de signe, mais qu'il faut en plus résoudre une équation pour savoir où placer les zéros (en pratique on ne détaille que la résolution de l'inéquation et on donne directement la réponse pour l'équation) si on veut parfaitement rédiger. Toutefois, on se permet d'aller parfois plus vite lorsqu'on cherche le signe d'une fonction affine.

En résumé,

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

De plus, on a $f(2) = 9$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ (il n'y a pas de forme indéterminée) et, puisque pour tout $x \neq 0$, $f(x) = x^2 \left(-1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}\right)$, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. Finalement,

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$		0	
f	$-\infty$	9	$-\infty$

2. La fonction f est dérivable sur \mathbf{R} et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = -3x^2 + 3$. Pour trouver le signe de cette expression, on factorise, ce qui donne pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f'(x) = -3(x^2 - 1) = -3(x - 1)(x + 1) = 3(1 - x)(x + 1).$$

Ainsi, on a :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$3(1 - x)$		0	0	
$x + 1$		0	0	
$f'(x)$		0	0	

De plus, $f(-1) = -2$, $f(1) = 2$. Enfin, pour tout $x \neq 0$, $f(x) = x^3 \left(-1 + \frac{3}{x^2}\right)$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. En résumé,

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	0	
f	$+\infty$	-2	2	$-\infty$

3. La fonction f est dérivable sur \mathbf{R} et, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$. Le discriminant de ce trinôme vaut 16, donc ses racines sont 1 et $-\frac{1}{3}$. Puisqu'un trinôme est du même signe que son coefficient dominant sauf entre ses racines, on obtient :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	0	

De plus, on a $f(1) = 0$ et $f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{32}{27}$. Comme pour tout $x \neq 0$, $f(x) = x^3 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$, on a aussi $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Finalement,

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	0	
f	$-\infty$	$\frac{32}{27}$	0	$+\infty$

4. La fonction f est dérivable sur \mathbf{R} et, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = 4x^3 + 16x = 4x(x^2 + 4)$. La forme étant factorisée, on obtient aisément son signe :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$4x$		0	
$x^2 + 4$		0	
$f'(x)$		0	

De plus, on a $f(0) = 8$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Finalement,

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
f	$+\infty$	8	$+\infty$

5. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, avec $u(x) = x + 2$ et $v(x) = x - 1$. Les fonctions u et v sont dérivables et, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 1$. Ainsi, f est dérivable sur $\mathbf{R} \setminus \{1\}$ et, pour tout $x \neq 1$,

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{1 \cdot (x - 1) - (x + 2) \cdot 1}{(x - 1)^2} = \frac{x - 1 - x - 2}{(x - 1)^2} = \frac{-3}{(x - 1)^2}.$$

Or $-3 < 0$, $(x - 1)^2 > 0$, donc par quotient $f'(x) < 0$. *Notons qu'on n'a pas développé le dénominateur : c'est un carré, on sait déjà qu'il est positif!* Ainsi, f est strictement décroissante sur $]-\infty; -1[$ et sur $]-1; +\infty[$. Ainsi,

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-$

De plus, par simples opérations, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$. Enfin, pour tout $x \notin \{0, 1\}$, $f(x) = \frac{x(1 + \frac{2}{x})}{x(1 - \frac{1}{x})} = \frac{1 + \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$ et on obtient avec cette forme que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-$
f	1	$-\infty$	1

Attention, f n'est pas strictement décroissante sur $\mathbf{R} \setminus \{-1\}$, puisque par exemple $f(0) = -2 < 4 = f(2)$. Cela n'est pas contradictoire, car le théorème qui donne le lien entre signe de la dérivée et variation de la fonction n'est valable que sur un intervalle.

Il faut bien marquer avec une double barre la valeur qui n'appartient pas au domaine de définition (parfois appelée « valeur interdite »). On retrouve alors bien que la fonction est décroissante sur $]-\infty; -1[$ et sur $]-1; +\infty[$ (on a deux flèches distinctes).

6. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = -4x$ et $v(x) = x^2 + 1$. Les fonctions u et v sont dérivables et, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $u'(x) = -4$ et $v'(x) = 2x$. Ainsi, f est dérivable sur \mathbf{R} et, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f'(x) = \frac{-4(x^2 + 1) - (-4x)2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-4x^2 - 4 + 8x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x^2 - 4}{(x^2 + 1)^2}.$$

Il faut maintenant étudier le signe de la dérivée. Pour cela, on factorise (*c'est toujours une bonne idée quand on cherche un signe, voir la leçon sur la résolution d'inéquations*).

$$f'(x) = \frac{4(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4(x - 1)(x + 1)}{(x^2 + 1)^2}.$$

On a alors le signe de la dérivée :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
$4(x-1)$		-	0	+		
$x+1$		-	0	+		
$(x^2+1)^2$		+	+	+		
$f'(x)$		+	0	-	0	+

De plus, pour tout $x \neq 0$, on a $f(x) = \frac{-4x}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = \frac{-4}{x(1+\frac{1}{x^2})}$. Sous cette forme, on obtient $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Finalement, puisque $f(-1) = 2$ et $f(1) = -2$,

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
f		0	2	-2	0	

7. On a pour tout $x \neq 1$, $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, avec $u(x) = x^2 - x - 2$ et $v(x) = x^2 - 2x + 1$. Les fonctions u et v sont dérivables avec, pour tout $x \neq 1$, $u'(x) = 2x - 1$ et $v'(x) = 2x - 2$. Ainsi, f est dérivable sur $\mathbf{R} \setminus \{1\}$ et pour tout $x \neq 1$,

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x^2-2x+1) - (x^2-x-2)(2x-2)}{(x-1)^4} = \frac{-x^2+6x-5}{(x-1)^4}.$$

On veut factoriser l'expression obtenue. Le trinôme $-x^2 + 6x - 5$ a un discriminant qui vaut 16 et ses racines sont 1 et 5. Or un discriminant est du signe de son coefficient dominant (ici négatif) sauf entre ses racines, d'où

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$	
$-x^2+6x-5$		-	+	0	-
$(x-1)^4$		+	+	+	+
$f'(x)$		-	+	0	-

Par simples opérations, on a $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$. De plus, pour tout $x \notin \{0, 1\}$,

$$f(x) = \frac{x^2(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2})}{x^2(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2})} = \frac{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

Sous cette forme, on obtient $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. Finalement, comme $f(5) = \frac{9}{4}$,

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$		
$f'(x)$		-	+	0	-	
f		1	$-\infty$	$-\infty$	$\frac{9}{4}$	1

8. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x-2}$ est de la forme $\frac{1}{u}$, avec $u : x \mapsto x - 2$, donc est dérivable de dérivée $-\frac{u'}{u^2}$, à savoir $x \mapsto -\frac{1}{(x-2)^2}$. On en déduit que f est dérivable sur $\mathbf{R} \setminus \{2\}$ et que, pour tout

$x \neq 2$,

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 1 - \frac{4}{(x-2)^2} \\
 &= \frac{(x-2)^2 - 4}{(x-2)^2} \\
 &= \frac{(x-2)^2 - 2^2}{(x-2)^2} \\
 &= \frac{(x-2-2)(x-2+2)}{(x-2)^2} && \text{(identité remarquable)} \\
 &= \frac{(x-4)x}{(x-2)^2}
 \end{aligned}$$

Ainsi,

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$
$x-4$	-	0	-	0	+
x	-	0	+	+	+
$(x-2)^2$	+	0	+	+	+
$f'(x)$	+	0	-	-	+

De plus, on obtient par simples opérations sur les limites, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$. Finalement, comme $f(0) = -3$ et $f(4) = 5$,

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-	+
f	$-\infty$	-3	$+\infty$	5	$+\infty$

Éléments de correction - Exercice 71

La fonction f est dérivable sur \mathbf{R} et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = -3e^{-3x}$. Puisque la fonction exponentielle ne prend que des valeurs strictement positives, $f'(x) < 0$. Ainsi,

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
f	0	$+\infty$

(les limites s'obtiennent par simples opérations).

Éléments de correction - Exercice 72

La fonction f est dérivable sur \mathbf{R} et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = \frac{-e^{-x} + e^x}{2}$. De plus, pour $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}
 f'(x) &\geq 0 \\
 \frac{-e^{-x} + e^x}{2} &\geq 0 \\
 -e^{-x} + e^x &\geq 2 \times 0 \\
 e^x &\geq e^{-x} \\
 x &\geq -x \\
 2x &\geq 0 \\
 x &\geq 0
 \end{aligned}$$

Et de même, on montre que $f'(x) = 0$ admet 0 comme unique solution. Ainsi,

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
f	$+\infty$	1	$+\infty$

(les limites s'obtiennent par simples opérations).

Éléments de correction - Exercice 73

1. La fonction f est dérivable sur \mathbf{R}_+^* (on rappelle que la fonction carrée est définie sur \mathbf{R}_+ mais elle n'est pas dérivable en 0) et,

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{25x^2 + 15x - 4}{2\sqrt{x}}.$$

(on a reconnu la dérivée d'un produit).

2. Soit $x > 0$. Le discriminant de $25x^2 + 15x - 4$ vaut 25, donc les racines de ce trinôme sont $-\frac{4}{5}$ et $\frac{1}{5}$. Ainsi, puisque le signe d'un trinôme est celui de son coefficient dominant sauf entre ses racines, on a :

x	0	$\frac{1}{5}$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
f	0	$-\frac{14\sqrt{5}}{25}$	$+\infty$

En effet, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ par simples opérations.

Éléments de correction - Exercice 74

La fonction f est dérivable sur $]1; +\infty[$ et, pour tout $x > 1$,

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \ln(x) + 1$$

(on a appliqué la formule de dérivation d'un produit).

Pour déterminer le signe de cette expression, la première idée est de la factoriser :

$$f'(x) = \frac{1 + x \ln(x) + x}{x}$$

Le problème est que le signe du numérateur semble difficile à obtenir ! Nous allons donc procéder autrement ici.

Soit $x > 1$. On a $\frac{1}{x} > 0$, $\ln(x) > 0$, $1 > 0$, donc, par somme de nombres strictement positifs, $f'(x) > 0$. Ainsi, f est strictement croissante sur $]1; +\infty[$.

Éléments de correction - Exercice 75

La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et, pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{2}{x} - 5.$$

Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &\geq 0 \\
 \frac{2}{x} - 5 &\geq 0 \\
 \frac{2}{x} &\geq 5 \\
 \frac{x}{2} &\leq \frac{1}{5} && \text{par décroissance de l'inverse sur }]0; +\infty[\\
 x &\leq \frac{2}{5}.
 \end{aligned}$$

Ainsi,

x	0	$\frac{2}{5}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-

donc la fonction f est croissante sur $]0; \frac{2}{5}]$ et décroissante sur $[\frac{2}{5}; +\infty[$.

Éléments de correction - Exercice 76

1. Soit $n \in \mathbf{N}$. Soit $x \in]0; 1[$. Puisque $x > 0$ et $e^{n(x-1)} > 0$ (la fonction exponentielle ne prenant que des valeurs strictement positives), on a $f_n(x) = x + e^{n(x-1)} > 0$.
2. Soit $n \in \mathbf{N}$. La fonction f_n est dérivable sur $]0; 1[$ et, pour $x \in]0; 1[$,

$$f'_n(x) = 1 + ne^{n(x-1)}.$$

Dans l'expression précédente, n est fixé (c'est donc une constante) tandis que x est la variable. On dérive donc « par rapport à x »).

Or $1 > 0$, $n \geq 0$ et $e^{n(x-1)} > 0$, donc $f'_n(x) > 0$. Ainsi, f_n est strictement croissante.

3. On peut s'aider du dessin et montrer que le point A de coordonnées $(1, 2)$ appartient à toutes les courbes. Soit $n \in \mathbf{N}$. On a $f_n(1) = 1 + e^{n(1-1)} = 1 + e^0 = 2$, ce qui signifie que A appartient à \mathcal{C}_n .

Éléments de correction - Exercice 77

Quand on demande d'étudier le signe d'une expression, on peut donner la réponse sous la forme d'un tableau de signe.

1. Soit $x \in \mathbf{R}$. On a

$$\begin{aligned}
 5e^x - 5 &\geq 0 \\
 5e^x &\geq 5 \\
 e^x &\geq 1 \\
 x &\geq 0
 \end{aligned}$$

Donc

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$5e^x - 5$		-	+

2. On a

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$3x - 1$		-	+
e^x		+	+
$(3x - 1)e^x$		-	+

3. On a

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	2	$+\infty$
$-8x + 4$	+	0	+	-
$3x - 1$	-	0	+	+
e^{x-2}	+	0	+	+
$(-8x + 4)(3x - 1)e^{x-2}$	-	0	+	0

4. On a

x	$-\infty$	$\frac{5}{6}$	$+\infty$
$6x - 5$	-	0	+
e^{3x-1}	+	0	+
$\frac{6x - 5}{e^{3x-1}}$	-	0	+

12.10 Établir une inégalité

Éléments de correction - Exercice 78

Dans cet exercice, x est un réel de l'intervalle $[2; 3]$. On commence donc chaque question en écrivant $2 \leq x \leq 3$.

1. On a

$$\begin{aligned}
 &2 \leq x \leq 3 \\
 &\text{donc } 7 \times 2 \leq 7 \times x \leq 7 \times 3 && \text{on multiplie par } 7 > 0 \\
 &\text{donc } 14 \leq 7x \leq 21 && \text{on simplifie} \\
 &\text{donc } 14 + 3 \leq 7x + 3 \leq 21 + 3 && \text{on ajoute } 3
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } 17 \leq A(x) \leq 24.$$

2. On a

$$\begin{aligned}
 &2 \leq x \leq 3 \\
 &\text{donc } -2 \geq -x \geq -3 && \text{on multiplie par } -1 \\
 &\text{donc } -2 + 1 \geq -x + 1 \geq -3 + 1 && \text{on ajoute } 1
 \end{aligned}$$

$$\text{On a donc } -2 \leq B(x) \leq -1.$$

3. On a

$$\begin{aligned}
 &2 \leq x \leq 3 \\
 &\text{donc } 17 \leq 7x \leq 21 && \text{on multiplie par } 7 > 0 \\
 &\text{donc } 14 \leq 7x - 3 \leq 18 && \text{on ajoute } -3 \\
 &\text{donc } \frac{1}{14} \geq \frac{1}{7x - 3} \geq \frac{1}{18} && \text{on compose par la fonction inverse, décroissante sur } \mathbf{R}_+^*
 \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \frac{1}{18} \leq C(x) \leq \frac{1}{14}.$$

4. On a

$$\begin{aligned}
 &2 \leq x \leq 3 \\
 &\text{donc } \frac{8}{3} \leq x + \frac{2}{3} \leq \frac{11}{3} && \text{on ajoute } \frac{2}{3} \\
 &\text{donc } \exp\left(\frac{8}{3}\right) \leq \exp\left(x + \frac{2}{3}\right) \leq \exp\left(\frac{11}{3}\right) && \text{on compose par la fonction exp, croissante} \\
 &\text{donc } \exp\left(\frac{8}{3}\right) \leq D(x) \leq \exp\left(\frac{11}{3}\right).
 \end{aligned}$$

5. On a

$$\begin{aligned}
 & 2 \leq x \leq 3 \\
 \text{donc } & -2 \geq -x \geq -3 && \text{on multiplie par } -1 < 0 \\
 \text{donc } & -1 \geq -x+1 \geq -2 && \text{on ajoute } 1 \\
 \text{donc } & (-1)^8 \geq (-x+1)^3 \geq (-2)^3 && \text{on compose par la fonction cube, croissante} \\
 \text{donc } & -1 \geq (-x+1)^3 \geq -8 \\
 \text{donc } & 1 \leq -(-x+1)^3 \leq 8 && \text{on multiplie par } -1 < 0 \\
 \text{donc } & \ln(1) \leq \ln(-(-x+1)^3) \leq \ln(8) && \text{on compose par la fonction } \ln, \text{ croissante}
 \end{aligned}$$

Donc, en simplifiant (on utilise $8 = 2^3$ puis $\ln(8) = 3 \ln(2)$), on obtient $0 \leq E(x) \leq 3 \ln(2)$.

6. On a

$$\begin{aligned}
 & 2 \leq x \leq 3 \\
 \text{donc } & \sqrt{2} \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{3} && \text{on compose racine carrée, croissante} \\
 \text{donc } & \sqrt{2} + \sqrt{2} \leq \sqrt{x} + \sqrt{2} \leq \sqrt{3} + \sqrt{2} && \text{on ajoute } \sqrt{2} \\
 \text{donc } & \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \leq \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \leq \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} && \text{on divise par } \sqrt{2} \\
 \text{donc } & 2 \leq \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \leq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + 1.
 \end{aligned}$$

Ainsi, en composant par la fonction cube, croissante, on obtient $8 \leq F(x) \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + 1\right)^3$.

Éléments de correction - Exercice 79

1. La fonction f est dérivable sur \mathbf{R}_+^* et pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{x}.$$

2. Soit $x \in [3; 4]$. On a

$$\text{donc } \begin{array}{ccc} 3 & \leq & x & \leq & 4 \\ \frac{1}{3} & \geq & \frac{1}{x} & \geq & \frac{1}{4} \end{array} \text{ par décroissance de l'inverse sur } \mathbf{R}_+^*$$

(comme la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante, on a changé le sens des inégalités). On a donc obtenu $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{3}$. Puisque $\frac{1}{4} \geq -\frac{1}{3}$, on en déduit $-\frac{1}{3} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{3}$.

Éléments de correction - Exercice 80

1. On a $25 \leq 29 \leq 36$ donc, par croissance de la fonction racine carrée, $\sqrt{25} \leq \sqrt{29} \leq \sqrt{36}$, puis $5 \leq \sqrt{29} \leq 6$.

2. Le discriminant du trinôme est 29, ses racines sont $\frac{1 - \sqrt{29}}{2}$ et $\frac{1 + \sqrt{29}}{2}$. On a

$$\begin{aligned}
 & 5 \leq \sqrt{29} \leq 6 \\
 \text{donc } & -5 \geq -\sqrt{29} \geq -6 && \text{on multiplie par } -1 < 0 \\
 \text{donc } & -5 + 1 \geq 1 - \sqrt{29} \geq -6 + 1 && \text{on ajoute } 1 \\
 \text{donc } & -4 \geq 1 - \sqrt{29} \geq -5 && \text{on simplifie} \\
 \text{donc } & \frac{-4}{2} \geq \frac{1 - \sqrt{29}}{2} \geq \frac{-5}{2} && \text{on divise par } 2 > 0 \\
 \text{donc } & -2 \geq \frac{1 - \sqrt{29}}{2} \geq -\frac{5}{2}.
 \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} 5 &\leq \sqrt{29} \leq 6 \\ \text{donc } 6 &\leq 1 + \sqrt{29} \leq 7 && \text{on ajoute } 1 \\ \text{donc } \frac{6}{2} &\leq \frac{1 + \sqrt{29}}{2} \leq \frac{7}{2} && \text{on divise par } 2 > 0 \\ \text{donc } 3 &\leq \frac{1 + \sqrt{29}}{2} \leq \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

Éléments de correction - Exercice 81

Soit $x \in \mathbf{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{5}(3 + x^2) &= x \\ 3 + x^2 &= 5x \\ x^2 - 5x + 3 &= 0 \end{aligned}$$

Le discriminant du trinôme obtenu vaut 13, ses racines sont $\frac{5 - \sqrt{13}}{2}$ et $\frac{5 + \sqrt{13}}{2}$. Il faut encadrer ces solutions pour vérifier si elles appartiennent à $[0; 1]$ (*l'énoncé assure qu'il n'y en a qu'une dans le bon intervalle, mais on ne sait pas encore laquelle!*)

On a

$$\begin{aligned} 9 &\leq 13 \leq 16 \\ \text{donc } \sqrt{9} &\leq \sqrt{13} \leq \sqrt{16} && \text{on compose par la racine carrée, croissante} \\ \text{donc } 3 &\leq \sqrt{13} \leq 4 && \text{on simplifie} \\ \text{donc } -3 &\geq -\sqrt{13} \geq -4 && \text{on multiplie par } -1 < 0 \\ \text{donc } 5 - 3 &\geq 5 - \sqrt{13} \geq 5 - 4 && \text{on ajoute } 5 \\ \text{donc } 2 &\geq 5 - \sqrt{13} \geq 1 && \text{on simplifie} \\ \text{donc } \frac{2}{2} &\geq \frac{5 - \sqrt{13}}{2} \geq \frac{1}{2} && \text{on multiplie par } \frac{1}{2} > 0 \end{aligned}$$

Ainsi, on a obtenu $\frac{5 - \sqrt{13}}{2} \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, donc en particulier $\frac{5 - \sqrt{13}}{2} \in [0; 1]$, ce qui signifie que cette valeur est bien une solution. L'énoncé affirme qu'il n'y en a pas d'autre ; vérifions-le :

$$\begin{aligned} 3 &\leq \sqrt{13} \leq 4 \\ \text{donc } 8 &\leq 5 + \sqrt{13} \leq 9 && \text{on ajoute } 5 \\ \text{donc } 4 &\leq \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \leq \frac{9}{2} && \text{on multiplie par } \frac{1}{2} > 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\frac{5 + \sqrt{13}}{2} \in \left[4; \frac{9}{2}\right]$ et en particulier $\frac{5 + \sqrt{13}}{2} \notin [0; 1]$, ce qui signifie que cette valeur n'est pas solution de l'équation proposée.

Finalement, l'unique solution à l'équation proposée est $\frac{5 - \sqrt{13}}{2}$.

Éléments de correction - Exercice 82

1. Le nombre $f(x)$ existe si et seulement si $x - 1 \neq 0$ (on n'a pas le droit de diviser par 0), à savoir $x \neq 1$. Ainsi, f est définie sur $\mathbf{R} \setminus \{1\}$.
2. La fonction f est dérivable sur $\mathbf{R} \setminus \{1\}$ et, pour tout $x \neq 1$,

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2}.$$

(on reconnaît un quotient $\frac{u}{v}$ avec $u : x \mapsto x^2 + 1$ et $v : x \mapsto x - 1$, puis on applique la formule de dérivation des quotients).

Le discriminant de $x^2 - 2x - 1$ est 8 et on obtient ensuite ses racines $\frac{2 - \sqrt{8}}{2} = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$ et $\frac{2 + \sqrt{8}}{2} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$. Ainsi, puisqu'un trinôme est du signe de son coefficient dominant sauf entre ses racines, on a :

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{2}$	1	$1 + \sqrt{2}$	$+\infty$			
$f'(x)$		+	0	-		-	0	+

On a par simples opérations $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$. De plus, pour tout $x \notin \{0, 1\}$,

$$f(x) = \frac{x^2(1 + \frac{1}{x^2})}{x(1 - \frac{1}{x})} = x \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}}, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty. \text{ Par ailleurs,}$$

$$\begin{aligned} f(1 - \sqrt{2}) &= \frac{(1 - \sqrt{2})^2 + 1}{1 - (\sqrt{2} - 1)} \\ &= \frac{1 - 2\sqrt{2} + 2 + 1}{-\sqrt{2}} \\ &= \frac{-4 + 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}(-4 + 2\sqrt{2})}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \\ &= \frac{-4\sqrt{2} + 4}{2} \\ &= 2 - 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

De même, $f(1 + \sqrt{2}) = 2 + 2\sqrt{2}$. Finalement,

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{2}$	1	$1 + \sqrt{2}$	$+\infty$			
$f'(x)$		+	0	-		-	0	+
f	$-\infty$	$2 - 2\sqrt{2}$	$-\infty$	$+\infty$	$2 + 2\sqrt{2}$	$+\infty$		

3. Soit $x \leq -1$. Puisque f est croissante sur $] -\infty ; -1]$, $f(x) \leq f(-1)$. Or $f(-1) = -1$, donc $f(x) \leq -1$.

Éléments de correction - Exercice 83

- $f(x)$ existe si et seulement si $x + 4 \neq 0$, à savoir $x \neq -4$. Donc le domaine de définition de f est $D =] -\infty ; -4[\cup] -4 ; +\infty [$.
- La fonction f est dérivable sur D et, pour tout $x \in D$, en appliquant la formule usuelle de dérivation d'un quotient,

$$f'(x) = \frac{9}{(x + 4)^2}.$$

Or $9 > 0$, $(x + 4)^2 > 0$, donc $f'(x) > 0$ puis f est strictement croissante sur D . De plus, pour tout $x \in D$,

$$f(x) = \frac{x(2 - \frac{1}{x})}{x(1 + \frac{4}{x})} = \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{4}{x}}$$

donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. Par simples opérations, on a aussi $\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = -\infty$. Finalement,

x	$-\infty$	-4	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
f	$2 \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow 2$

3. Soit $x \geq -1$. Puisque f est croissante sur $[-1; +\infty[$, $f(x) \geq f(-1)$. Or $f(-1) = -1$, donc $f(x) \geq -1$.

Éléments de correction - Exercice 84

1. La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et, pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x}.$$

Soit $x \in \mathbf{R}_+^*$. On a

$$\begin{aligned} f'(x) &\geq 0 \\ 1 - \frac{1}{x} &\geq 0 \\ 1 &\geq \frac{1}{x} && \text{on ajoute } \frac{1}{x} \\ 1 &\leq x && \text{on compose par la fonction inverse, décroissante sur } \mathbf{R}_+^* \end{aligned}$$

Ainsi,

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	-

Donc f est croissante sur $]0; 1]$ et décroissante sur $[1; +\infty[$.

2. Soit $x \in [1; 2]$. Puisque f est croissante sur $[1; 2]$, on a $f(1) \leq f(x) \leq f(2)$. Or $f(1) = 1$ et $f(2) = 2 - \ln(2)$. Donc $1 \leq f(x) \leq 2 - \ln(2)$. Puisque $\ln(2) > 0$, on a $2 - \ln(2) < 2$ et donc en particulier $1 \leq f(x) \leq 2$.

Éléments de correction - Exercice 85

Soit $k \geq 2$. On étudie le signe de la différence, qu'on factorise :

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2} - \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) &= \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k} \\ &= \frac{k-1}{k^2(k-1)} - \frac{k^2}{k^2(k-1)} + \frac{k(k-1)}{k^2(k-1)} \\ &= \frac{k-1-k^2+k(k-1)}{k^2(k-1)} \\ &= \frac{k-1-k^2+k^2-k}{k^2(k-1)} \\ &= \frac{-1}{k^2(k-1)}. \end{aligned}$$

Or $-1 \leq 0$, $k^2 \geq 0$, $k-1 \geq 0$ donc, via la règle des signes (*on aurait pu aussi faire un tableau de signes, ce qui revient au même*), $\frac{1}{k^2} - \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \leq 0$, donc $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

Éléments de correction - Exercice 86


1. (a) La fonction h est dérivable sur \mathbf{R} et, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$h'(x) = e^x - 1$$

Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} h'(x) &\geq 0 \\ e^x - 1 &\geq 0 \\ e^x &\geq 1 \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

Donc

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$		$-$	$+$
h			

La fonction h est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$.

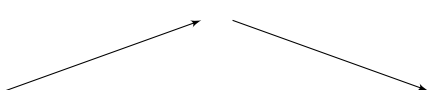
- (b) Le minimum de la fonction h est donc atteint en 0 (donc pour tout $x \in \mathbf{R}$, $h(x) \geq h(0)$) et il vaut $h(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$. Cela signifie que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $h(x) \geq 0$.
 (c) Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} h(x) &\geq 0 \\ \text{donc } e^x - x - 1 &\geq 0 \\ \text{donc } e^x &\geq x + 1 \text{ on ajoute } x + 1. \end{aligned}$$

2. On introduit la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x) - x$ dans le but d'étudier son signe. La fonction f est définie et dérivable sur $]-1; +\infty[$ et, pour tout $x > -1$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x+1} - 1 \\ &= \frac{1 - (x+1)}{x+1} \\ &= \frac{-x}{x+1} \end{aligned}$$

Ainsi,

x	-1	0	$+\infty$
$-x$		$+$	$-$
$x+1$		$+$	$+$
$f'(x)$		$+$	$-$
f			

Ainsi, le maximum de f est atteint en 0 , ce qui signifie que pour tout $x > -1$, $f(x) \leq f(0)$. Puisque $f(0) = \ln(1+0) - 0 = 0$, on en déduit :

$$\begin{aligned} f(x) &\leq 0 \\ \text{donc } \ln(1+x) - x &\leq 0 \\ \text{donc } \ln(1+x) &\leq x \qquad \qquad \qquad \text{on ajoute } x. \end{aligned}$$

- Le nombre $f(x)$ existe si et seulement si $1-x > 0$ (pour que le terme $\ln(1-x)$ existe), c'est-à-dire $x < 1$. Ainsi, le domaine de définition de f est $]-\infty; 1[$.
- La fonction f est dérivable sur $]-\infty; 1[$ et

$$\forall x < 1, \quad f'(x) = -\ln(1-x).$$

(il faut reconnaître un produit pour dériver la fonction $x \mapsto (1-x)\ln(1-x)$, et utiliser la formule de dérivation d'un produit).

Soit $x < 1$. On a

$$\begin{aligned} -\ln(1-x) &\geq 0 \\ \ln(1-x) &\leq 0 \\ 1-x &\leq e^0 \\ 1-x &\leq 1 \\ -x &\leq 0 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

x	$-\infty$	0	1
$f'(x)$		$-$	$+$
f	$+\infty$	0	$+\infty$

(on verra comment déterminer les limites cette année).

- La question précédente assure que le minimum de f est 0, donc pour tout $x < 1$, $f(x) \geq 0$.
- Il faut utiliser la question précédente. Soit $x < 1$. On a

$$\begin{aligned} &(1-x)\ln(1-x) + x \geq 0 \\ \text{donc } &(1-x)\ln(1-x) \geq -x \\ \text{donc } &\ln(1-x) \geq \frac{-x}{1-x} \quad \text{car } 1-x > 0 \\ \text{donc } &1-x \geq \exp\left(\frac{x}{x-1}\right) \end{aligned}$$

Éléments de correction - Exercice 88

- (a) On a $\varphi(1) = 1^2 - 1 + 3\ln(1) = 1 - 1 + 0 = 0$.
- (b) La fonction φ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et, pour tout $x > 0$,

$$\varphi'(x) = 2x + \frac{3}{x} = \frac{2x^2 + 3}{x}.$$

Pour tout $x > 0$, $2x^2 > 0$, $3 > 0$ donc $2x + 3 > 0$, et $x > 0$, donc $\varphi'(x) > 0$. Ainsi, φ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

En particulier, pour tout $x < 1$, $\varphi(x) < \varphi(1)$ puis $\varphi(x) < 0$. De même, pour tout $x > 1$, $\varphi(x) > \varphi(1)$ puis $\varphi(x) > 0$. En résumé,

x	0	1	$+\infty$
$\varphi(x)$		$-$	$+$

- Pour tout $x > 0$, $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, avec $u : x \mapsto x^2 - 2x - 2 - 3\ln(x)$ et $v : x \mapsto x$. Les fonctions u et v sont dérivables et $u' : x \mapsto 2x - 2 - \frac{3}{x}$ et $v' : x \mapsto 1$. Ainsi, avec la formule de dérivation

d'un quotient, on obtient que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \\ &= \frac{(2x - 2 - \frac{3}{x})x - (x^2 - 2x - 2 - 3\ln(x))}{x^2} \\ &= \frac{2x^2 - 2x - 3 - x^2 + 2x + 2 + 3\ln(x)}{x^2} \\ &= \frac{x^2 - 1 + 3\ln(x)}{x^2} \\ &= \frac{\varphi(x)}{x^2}. \end{aligned}$$

3. On connaît la signe de φ avec la question 1., d'où :

x	0	1	$+\infty$
$\varphi(x)$	-	0	+
x^2	+	+	+
$f'(x)$	-	0	+
f			

Éléments de correction - Exercice 89

Ici on étudie une méthode très classique. On veut étudier les variations de f_n , mais le problème est que le signe de la dérivée f'_n n'est pas aisé à obtenir. On cherche donc ce signe à l'aide d'une étude des variations de f'_n , qu'on obtient en dérivant à nouveau f'_n .

1. f_n est dérivable sur \mathbf{R} par opérations sur des fonctions dérivables sur \mathbf{R} . On a, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f'_n(x) = n - \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}.$$

Pour obtenir les variations de f'_n , il faut dériver cette fonction (on notera f''_n la dérivée de f'_n). On a, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f''_n(x) = \frac{e^x(e^x - 1)}{(e^x + 1)^3}.$$

Or $e^x > 0$, $(1 + e^x)^3 > 0$ et

$$e^x - 1 \geq 0 \text{ si et seulement si } x \geq 0$$

De plus, $f'_n(0) = n - \frac{1}{4}$ et, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f'_n(x) = n - \frac{e^x}{e^{2x}(1 + 2e^{-x} + e^{-2x})} = n - \frac{1}{e^x(1 + 2e^{-x} + e^{-2x})} = n - \frac{1}{e^x + 2 + e^{-x}},$$

d'où $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'_n(x) = n$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'_n(x) = n$. En résumé, on a obtenu :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''_n(x)$	-	0	+
f'_n			

2. La fonction précédente assure que f'_n est minorée par $n - \frac{1}{4}$ et, puisque $n \in \mathbf{N}^*$, $n - \frac{1}{4} > 0$. Donc f_n est une fonction strictement croissante sur \mathbf{R} .

Éléments de correction - Exercice 90

- 2 est racine évidente de $x^2 - 5x + 6$, et les coefficients racines assure que le produit de 2 avec l'autre racine est égal à 6, donc 3 est l'autre racine. Ainsi, le domaine de définition de h est $D = \mathbf{R} \setminus \{2, 3\}$.

Si on n'a pas repéré de racine évidente, on peut aussi obtenir les racines avec les formules liées au discriminant !

- Le signe de $x^2 - 5x + 6$ est celui de son coefficient dominant (ici $1 > 0$), sauf entre ses racines, donc

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$	
$x^2 - 5x + 6$	+	0	-	0	+

De plus $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \geq 0$, donc

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} h(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} h(x) = +\infty.$$

Enfin, pour tout $x \notin \{0, 2, 3\}$,

$$h(x) = \frac{x^2(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2})}{x^2(1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2})} = \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}}$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1$$

Enfin, la fonction h est dérivable sur D et on a,

$$\forall x \in D, \quad h'(x) = \frac{-3x^2 + 10x - 7}{(x^2 - 5x + 6)^2}.$$

Or 1 est racine évident de $-3x^2 + 10x - 7$ et les relations coefficients racines assure que le produit de 1 avec l'autre racine doit être égal à $-\frac{7}{-3}$, ce qui entraîne que l'autre racine est $\frac{7}{3}$. Finalement, puisque le signe d'un trinôme est le même que celui de son coefficient dominant (ici $-3 < 0$) sauf entre ses racines, on obtient :

x	$-\infty$	1	2	$\frac{7}{3}$	3	$+\infty$								
$h'(x)$	-	0	+	+	0	-	+	0	-	+	+	0	-	+
h	1	↘	0	↗	$+\infty$	$-\infty$	↗	-8	↘	$-\infty$	$+\infty$	↘	1	

12.11 Exercices d'entraînement supplémentaires

Éléments de correction - Exercice 91

$$1. A = \frac{2}{\frac{2}{3} + 2} = \frac{2}{\frac{2}{3} + \frac{6}{3}} = \frac{2}{\frac{8}{3}} = \frac{2 \times 3}{8} = \frac{3}{4}.$$

$$2. B = \frac{a + \frac{1}{a}}{a} = \frac{\frac{a^2}{a} + \frac{1}{a}}{a} = \frac{\frac{a^2+1}{a}}{a} = \frac{a^2+1}{a^2} = 1 + \frac{1}{a^2}.$$

$$3. C = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{3}{6} + \frac{2}{6}} = \frac{1}{\frac{5}{6}} = \frac{6}{5}.$$

$$4. D = \frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a} = \frac{a}{a^2(a+b)} + \frac{a+b}{a^2(a+b)} - \frac{a(a+b)}{a^2(a+b)} = \frac{a+a+b-a(a+b)}{a^2(a+b)} = \frac{2a+b-a^2-ab}{a^2(a+b)}.$$

Éléments de correction - Exercice 92

1. Comme $4 = 2 \times 2$, un dénominateur commun des trois fractions qui sont les termes de A est 4×3 , soit 12. On note alors que

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{6}{12} + \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{13}{12}.$$

2. Comme $3 \times 8 = 24$ et $2 \times 8 = 16$, un multiple commun de 16 et 24 est $3 \times 2 \times 8$, soit 48. On peut donc écrire

$$B = \frac{1}{24} - \frac{1}{16} = \frac{2}{48} - \frac{3}{48} = -\frac{1}{48}.$$

3. Il faut effectuer les simplifications au fur et à mesure du calcul :

$$C = \frac{\frac{7+5}{3 \times 5}}{\frac{3 \times 5 + 4 \times 12}{4 \times 5}} = \frac{7+5}{3 \times 5} \times \frac{4 \times 5}{3 \times 4 + 4 \times 12} = \frac{7+5}{3} \times \frac{4}{3 \times 5 + 4 \times 12} = \frac{12}{3} \times \frac{4}{15 + 48} = 4 \times \frac{4}{63} = \frac{16}{63}.$$

4. On a

$$D = \frac{\frac{3}{4} + \frac{9}{8} \times \frac{1}{12}}{2 - \frac{4}{3}} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{4}}{\frac{2 \times 3 - 4}{3}} = \frac{\frac{3 \times 8 + 3}{8 \times 4}}{\frac{2}{3}} = \frac{3 \times 8 + 3}{8 \times 4} \times \frac{3}{2} = \frac{81}{64}.$$

Éléments de correction - Exercice 93

1. $A = \frac{32}{40} = \frac{8 \times 4}{8 \times 5} = \frac{4}{5}.$

2. $B = 8^3 \times \frac{1}{4^2} = (2 \times 4)^3 \times \frac{1}{4^2} = 2^3 \times 4^3 \times \frac{1}{4^2} = 2^3 \times 4 = 2^5.$

3. $C = \frac{27^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4} = \frac{(3^3)^{-1} \times (2^2)^2}{3^{-4} \times 2^4} = \frac{3^4}{3^3} = 3.$

4. $D = \frac{(-2)^{2k+1} \times 3^{2k-1}}{4^k \times 3^{-k+1}} = \frac{(-2) \times (-2)^{2k} \times 3^{2k} \times 3^{-1}}{4^k \times 3^{-k} \times 3} = \frac{(-2) \times 4^k \times 3^{2k} \times 3^k}{4^k \times 3^2} = -2 \times 3^{3k-2}.$

Éléments de correction - Exercice 94

1. $A = \frac{2 \times 3 \times 5 \times 7}{2} + \frac{2 \times 3 \times 5 \times 7}{3} + \frac{2 \times 3 \times 5 \times 7}{5} + \frac{2 \times 3 \times 5 \times 7}{7}$
 $= 3 \times 5 \times 7 + 2 \times 5 \times 7 + 2 \times 3 \times 7 + 2 \times 3 \times 5 = 105 + 70 + 42 + 30 = 247.$

2. $B = \left(\frac{136}{15} - \frac{28}{5} + \frac{31}{5} \right) \times \frac{7}{8}$
 $= \left(\frac{136}{15} + \frac{3}{5} \right) \times \frac{7}{8} = \left(\frac{136}{15} + \frac{9}{15} \right) \times \frac{7}{8} = \frac{145}{15} \times \frac{7}{8} = \frac{29}{3} \times \frac{7}{8} = \frac{203}{24}.$

3. $C = \frac{5^{10} \times 7^3 - 5^{10} \times 7^4}{5^9 \times 7^3 + 5^9 \times 7^3 \times 2^3} = \frac{5^{10} \times 7^3(1-7)}{5^9 \times 7^3(1+2^3)} = \frac{5 \times (-6)}{9} = -\frac{10}{3}.$

4. $D = \frac{1\,978 \times 1\,979 + 1\,979 \times 21 + 21 + 1\,958}{1\,979 \times (1\,980 - 1\,978)}$
 $= \frac{1\,979 \times (1\,978 + 21) + 1\,979}{1\,979 \times 2} = \frac{1\,979 \times (1\,978 + 21 + 1)}{1\,979 \times 2} = \frac{1\,979 \times 2\,000}{1\,979 \times 2} = 1\,000.$

Éléments de correction - Exercice 95

On a

$$A = \frac{\frac{3}{6} - \frac{3}{17} + \frac{3}{37}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}}{\frac{7}{5} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - \frac{7}{2}} = \frac{3 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{17} + \frac{1}{37} \right)}{5 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{17} + \frac{1}{37} \right)} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}}{-7 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right)} = \frac{3}{5} - \frac{1}{7} = \frac{16}{35}.$$

Éléments de correction - Exercice 96

1. On reconnaît l'identité remarquable $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, valable pour tous a et b réels. Ainsi,

$$A = \frac{2\ 022}{2\ 022^2 + (1 - 2\ 022)(1 + 2\ 022)} = 2\ 022 \cdot 022^2 + 1 - 2\ 022^2 = 2\ 022.$$

2. On fait apparaître 2 021 dans 2 020 et 2 022 au dénominateur :

$$\begin{aligned} B &= \frac{2\ 021^2}{(2\ 021 - 1)^2 + (2\ 021 + 1)^2 - 2} \\ &= \frac{2\ 021^2}{2\ 021^2 - 2 \times 2\ 021 \times 1 + 1 + 2\ 021^2 + 2 \times 2\ 021 \times 1 - 2} = \frac{2\ 021}{2\ 021 - 2 + 2\ 021 + 2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

3. En posant $a = 1\ 234$, on a $1\ 235 = a + 1$ et $2\ 469 = 2a + 1$. Donc,

$$C = \frac{(a+1)(2a+1) - a}{a(2a+1) + a+1} = \frac{2a^2 + 2a + 1}{2a^2 + 2a + 1} = 1.$$

4. En posant $a = 1\ 000$, on a $999 = a - 1$, $1\ 001 = a + 1$, $1\ 002 = a + 2$ et $4\ 002 = 2a + 2$. Donc,

$$D = \frac{4a+2}{a(a+2) - (a-1)(a+1)} = \frac{2(2a+1)}{a^2 + 2a - (a^2 - 1)} = \frac{2(2a+1)}{2a+1} = 2.$$

Éléments de correction - Exercice 97

1. $A = \frac{n}{n(n+1)^2} + \frac{n(n+1)}{n(n+1)^2} - \frac{(n+1)^2}{n(n+1)^2}$
 $= \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} = \frac{n + n^2 + n - (n^2 + 2n + 1)}{n(n+1)^2} = -\frac{1}{n(n+1)^2}.$
2. $B = \frac{(a-b)(a^2 + ab + b^2)}{(a-b)^2} - \frac{(a+b)^2}{a-b} = \frac{ab + a^2 + b^2}{a-b} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{a-b} = -\frac{ab}{a-b}.$
3. $C = \frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)} \times \frac{n^2(n-1)^2}{2n+2} = \frac{6(n+1)}{2(n-1)} \times \frac{n(n-1)}{2(n+1)} = \frac{3}{2}n.$

Éléments de correction - Exercice 98

1. $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x^2-1} = \frac{x(x+1) - 2(x-1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{2}{x^2-1} = \frac{x^2 + x - 2x + 2}{(x+1)(x-1)} - \frac{2}{(x+1)(x-1)} = \frac{x^2 - x}{(x+1)(x-1)} = \frac{x}{x+1}.$
2. $\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-2} + \frac{8}{x^2-4} = \frac{2(x-2) - (x+2)}{(x+2)(x-2)} + \frac{8}{(x+2)(x-2)} = \frac{2x - 4 - x - 2 + 8}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x-2}.$
3. $\frac{1}{x} + \frac{x+2}{x^2-4} + \frac{2}{x^2-2x} = \frac{x}{x-1} + \frac{x}{x+1} - \frac{2x}{x^2-1} = \frac{x(x+1+x-1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{2x}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x^2 - 2x}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x}{x+1}.$
4. $\frac{1}{x} + \frac{x+2}{x^2-4} + \frac{2}{x^2-2x} = \frac{1}{x} + \frac{x+2}{(x+2)(x-2)} + \frac{2}{x(x-2)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x(x-2)} = \frac{x-2+x}{x(x-2)} + \frac{2}{x(x-2)} = \frac{x-2+x+2}{x(x-2)} = \frac{x}{x-2}.$

Éléments de correction - Exercice 99

Avec la formule donnée, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A_n = \frac{\frac{n^2(n^2+1)}{2}}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{n^2(n^2+1)}{2} \times \frac{2}{n(n+1)} = \frac{n(n^2+1)}{n+1} = \frac{n^3+n}{n+1}.$$

Éléments de correction - Exercice 100

Cet exercice nécessite de savoir résoudre des équations du premier degré. Cela est étudié en détail dans une leçon ultérieure.

Notons x la contenant (en L) de la barrique. Après les trois ventes, la quantité restante est

$$x - \frac{x}{3} - \frac{2x}{9} - \frac{x}{5} = \frac{45x - 15x - 10x - 9x}{45} = \frac{11x}{45}.$$

La valeur totale de cette quantité restante est 66 €, pour un prix de vente au litre égal à 1,5 €, donc $\frac{11}{45}x \times 1,5 = 66$. Résolvons cette équation.

$$\begin{aligned} \frac{11}{45}x \times \frac{3}{2} &= 66 \\ x &= \frac{2}{3} \times \frac{45}{11} \times 66 \\ x &= \frac{2 \times 15 \times 3 \times 3 \times 2 \times 11}{11 \times 3} \end{aligned}$$

Finalement, la contenant de la barrique est $x = 180$ L.

Éléments de correction - Exercice 101

Cet exercice nécessite de savoir résoudre des équations du premier degré. Cela est étudié en détail dans une leçon ultérieure.

Soit x la valeur de l'héritage.

$$\begin{aligned} 32\,000 &= \left(1 - \frac{3}{10}\right)x \\ 32\,000 &= \frac{8}{11}x \\ x &= \frac{32\,000 \times 11}{8} \\ x &= 44\,000. \end{aligned}$$

Le premier a reçu $\frac{3}{11}x = \frac{3}{11} \times 44\,000 = 12\,000$ €.

Soit p_2 la part du deuxième héritier et p_3 la part du troisième héritier. Alors

$$\begin{cases} p_2 + p_3 = 32\,000 \\ \frac{2}{7}p_2 = \frac{4}{9}p_3 \end{cases} \quad \begin{cases} p_2 + p_3 = 32\,000 \\ 9p_2 = 14p_3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{on multiplie la deuxième ligne par } \frac{7 \times 9}{2} \\ \\ \text{on substitue la valeur de } p_2 \text{ obtenue} \\ \text{à la première ligne dans la deuxième} \end{array}$$

$$\begin{cases} p_2 = 32\,000 - p_3 \\ 23p_3 = 288\,000 \end{cases}$$

Donc $p_3 = \frac{288\,000}{23}$ et $p_2 = 32\,000 - \frac{288\,000}{23}$.

Éléments de correction - Exercice 102

Cet exercice nécessite de savoir résoudre des équations du premier degré. Cela est étudié en détail dans une leçon ultérieure.

Par jour, la pendule avance de $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ minute. Soit x le nombre de jours pour qu'elle avance de deux minutes.

$$\begin{aligned} \frac{1}{12}x &= 2 \\ x &= 24 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \\ \text{on multiplie par 12} \end{array}$$

Finalement, il faut 24 jours pour que la pendule avance de 2 min.

Éléments de correction - Exercice 103

1. On fait apparaître les facteurs premiers 2 et 3 :

$$\frac{8^{17} \cdot 6^{-6}}{9^{-3} \cdot 2^{42}} = \frac{2^{3 \cdot 17} \cdot 2^{-6} \cdot 3^{-6}}{3^{2 \cdot (-3)} \cdot 2^{42}} = \frac{2^{51-6} \cdot 3^{-6}}{3^{-6} \cdot 2^{42}} = 2^{45-42} = 2^3 = 8.$$

2. Avec les facteurs premiers 5 et 11 :

$$\frac{55^2 \cdot 121^{-2} \cdot 125^2}{275 \cdot 605^{-2} \cdot 25^4} = \frac{(5 \cdot 11)^2 \cdot (11^2)^{-2} \cdot (5^3)^2}{5^2 \cdot 11 \cdot (11^2 \cdot 5)^{-2} \cdot (5^2)^4} = \frac{5^8 \cdot 11^{-2}}{5^8 \cdot 11^{-3}} = 11.$$

3. On fait apparaître les facteurs premiers 2, 3 et 5 :

$$\frac{12^{-2} \cdot 15^4}{25^2 \cdot 18^{-4}} = \frac{(2^2)^{-2} \cdot 3^{-2} \cdot 3^4 \cdot 5^4}{(5^2)^2 \cdot 2^{-4} \cdot (3^2)^{-4}} = \frac{2^{-4} \cdot 3^2 \cdot 5^4}{2^{-4} \cdot 3^{-8} \cdot 5^4} = 3^{10}.$$

4. Même méthode que précédemment :

$$\frac{36^3 \cdot 70^5 \cdot 10^2}{14^3 \cdot 28^2 \cdot 15^6} = \frac{2^6 \cdot 3^6 \cdot 2^5 \cdot 5^5 \cdot 7^5 \cdot 2^2 \cdot 5^2}{2^3 \cdot 7^3 \cdot 2^4 \cdot 7^2 \cdot 3^6 \cdot 5^6} = \frac{2^{13} \cdot 3^6 \cdot 5^7 \cdot 7^5}{2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^6 \cdot 7^5} = 2^6 \cdot 5.$$

Éléments de correction - Exercice 104

1. $A = \frac{a^2 \times b^2 \times b}{a^{3-n}} = a^{n-1} b^3.$

2. $B = \frac{3a^3 + 6a^2b^2}{4a^2b} = \frac{2a^2(a + 3b^2)}{4a^2b} = \frac{a + 3b^2}{2b}.$ Notons que la question est peu précise ici : que signifie « simple » ? La forme $B = \frac{a}{2b} + \frac{3b}{2}$ est simple également et répond aussi à la question !

Éléments de correction - Exercice 105

1. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $(2x + 3)^3 = 2^3 \times \left(x + \frac{3}{2}\right)^3 = 8 \left(x + \frac{3}{2}\right)^3.$

2. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $(2x + 3)^3 = 3^3 \times \left(1 + \frac{2x}{3}\right)^3 = 27 \left(1 + \frac{2x}{3}\right)^3.$

3. Pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, $(2x + 3)^4 = x^4 \times \left(2 + \frac{3}{x}\right)^4.$

Éléments de correction - Exercice 106

1. On a

$$\left(\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}}\right)^2 = 3 + \sqrt{5} - 2\sqrt{3 + \sqrt{5}}\sqrt{3 - \sqrt{5}} + 3 - \sqrt{5} = 6(2\sqrt{9 - 5}) = 6 - 4 = 2.$$

De plus, $3 + \sqrt{5} \geq 3 - \sqrt{5}$, donc par croissance de la fonction racine carrée, $\sqrt{3 + \sqrt{5}} \geq \sqrt{3 - \sqrt{5}}$, d'où $\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}} \geq 0$. Ainsi, le calcul précédent permet de conclure :

$$\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}} = \sqrt{2}.$$

2. On a

$$\left(\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}\right)^2 = 2 + 2\sqrt{2} + 1 = (\sqrt{2})^2 + 2 \times 1 \times \sqrt{2} + 1^2 = (1 + \sqrt{2})^2.$$

Puisque $1 + \sqrt{2} \geq 0$, on en déduit que $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}.$

Éléments de correction - Exercice 107

On a

$$A = \frac{1}{1 + (\sqrt{2} + \sqrt{3})} = \frac{1 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})}{(1 + (\sqrt{2} + \sqrt{3}))(1 - (\sqrt{2} + \sqrt{3}))} = \frac{1 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})}{1 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1}{4 + 2\sqrt{6}}.$$

Ainsi, la technique de la « quantité conjuguée » n'est pas suffisante ici ; mais on peut la réappliquer.

On a

$$A = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1)(4 - 2\sqrt{6})}{(4 + 2\sqrt{6})(4 - 2\sqrt{6})} = \frac{4\sqrt{2} - 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 6\sqrt{2} - 4 + 2\sqrt{6}}{16 - 24} = \frac{2\sqrt{2} + 4 - 2\sqrt{6}}{8}.$$

Finalement,

$$A = \frac{\sqrt{2} + 2 - \sqrt{6}}{4}.$$

Éléments de correction - Exercice 108

1. On utilise la quantité conjuguée du dénominateur :

$$\frac{3 - \sqrt{5}}{2 + \sqrt{5}} = \frac{(3 - \sqrt{5})(2 - \sqrt{5})}{(2 - \sqrt{5})(2 + \sqrt{5})} = \frac{6 - 3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} + 5}{2^2 - \sqrt{5}^2} = \frac{11 - 5\sqrt{5}}{-1} = 5\sqrt{5} - 11.$$

2. On élève au carré :

$$\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}^2 = 3 + 2\sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2} + 1 = (\sqrt{2})^2 + 2 \times 1 \times \sqrt{2} + 1^2 = (1 + \sqrt{2})^2,$$

donc, comme $3 + 2\sqrt{2} \geq 0$,

$$\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}.$$

3. On élève au carré et on utilise la quantité conjuguée du dénominateur obtenu :

$$\sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}}^2 = \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{(2 + \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})}{(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})} = \frac{2^2 + 4\sqrt{2} + \sqrt{2}^2}{2^2 - \sqrt{2}^2} = \frac{6 + 4\sqrt{2}}{2} = 3 + 2\sqrt{2}.$$

Puisque $3 + 2\sqrt{2} \geq 0$, on en déduit, avec la question précédente,

$$\sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}} = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}.$$

$$4. 3e^{-\frac{1}{2} \ln 3} = \frac{3}{e^{\frac{1}{2} \ln 3}} = \frac{3}{e^{\ln(\sqrt{3})}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2} = \sqrt{3}.$$

$$5. 2\sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{4(3 + \sqrt{5})}{2}} = \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = \sqrt{1 + 2\sqrt{5} + \sqrt{5}^2} = \sqrt{(1 + \sqrt{5})^2} = 1 + \sqrt{5}.$$

6. On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \right) &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{2}^2}{\sqrt{2}^2 - 1} \right) = \frac{1}{2} \ln (3 + 2\sqrt{2}) = \ln (\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}). \end{aligned}$$

Avec la question 2., on en déduit

$$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \right) = \ln(1 + \sqrt{2}).$$

Éléments de correction - Exercice 109

$$1. f(x) + \frac{1}{f(x)} = \frac{x}{\sqrt{x-1}}.$$

$$2. \frac{f(x+2) - f(x)}{f(x+2) + f(x)} = x - \sqrt{x^2 - 1}.$$

3. On essaie de reconnaître une identité remarquable dans la racine :

$$\sqrt{x+2f(x)} = 1 + \sqrt{x-1} = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = \sqrt{\sqrt{x-1}^2 + 2\sqrt{x-1} + 1} = \sqrt{(\sqrt{x-1} + 1)^2} = \sqrt{x-1} + 1.$$

$$4. \text{ On a } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}, \text{ d'où } \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1}.$$

$$5. \text{ On a } f''(x) = -\frac{1}{4} \frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}}, \text{ donc}$$

$$f(x) + 4f''(x) = \sqrt{x-1} - \frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}} = \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)\sqrt{x-1}} = \frac{x(x-2)}{(x-1)\sqrt{x-1}}.$$

$$6. \frac{f(x)}{f''(x)} = -4(x-1)^2.$$

Éléments de correction - Exercice 110

1. On peut développer l'expression $n(n+3) + 2$ pour obtenir une expression du second degré que l'on factorise en utilisant les formules classiques : $n(n+3) + 2 = (n+1)(n+2)$.
2. On note que $p = (n+1)(n+2) \times n(n+3) = q(q-2)$ d'après la relation de la question précédente.
3. On note que $p+1 = q(q-2) + 1 = q^2 - 2q + 1 = (q-1)^2$. Finalement $p+1$ est un carré parfait.

Éléments de correction - Exercice 111

Soit a , b et c trois entiers relatifs. On a

$$\begin{aligned} & (c(a^2 - b^2))^2 + (2abc)^2 - (c(a^2 + b^2))^2 \\ = & c^2(a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2c^2 - c^2(a^2 + b^2)^2 \\ = & c^2((a^2 - b^2)^2 - (a^2 + b^2)^2 + 4a^2b^2) && \text{mise en facteur de } c^2 \\ = & c^2((a^2 - b^2) - (a^2 + b^2))((a^2 - b^2) + (a^2 + b^2)) + 4a^2b^2 && \text{utilisation d'une identité remarquable} \\ = & c^2((-2b^2) \times (2a^2) + 4a^2b^2) && \text{simplification} \\ = & 0 \end{aligned}$$

Éléments de correction - Exercice 112

1. En exploitant successivement la troisième, puis la première et la deuxième, puis à nouveau la troisième identité remarquable, on note que

$$\begin{aligned} 4d^2 - (d^2 - r^2 + 1)^2 &= (2d - d^2 + r^2 - 1)(2d + d^2 - r^2 + 1) \\ &= (r^2 - (d-1)^2)((d+1)^2 - r^2) \\ &= (r-1+d)(r+1-d)(d+1-r)(d+1+r) \end{aligned}$$

2. Comme $d > 0$ et $r > 1$, $d+r-1 > 0$. Il est de plus évident que $d+r+1 > 0$. Finalement le réel manipulé est positif si et seulement si $(1+r-d)(1-r+d) \geq 0$ si et seulement si $r-1 \leq d \leq r+1$ ou $r+1 \leq d \leq r-1$. Le deuxième cas étant impossible, les deux cercles considérés ont un point commun si et seulement si $r-1 \leq d \leq r+1$.

Éléments de correction - Exercice 113

1. La première expression est un carré parfait que l'on repère en notant que $x^4 = (x^2)^2$. En effet $A_1 = (x^2 + 9)^2$.
2. On peut factoriser A_2 en utilisant directement la troisième identité remarquable $A_2 = ((2x - 3) - (x + 7))((2x - 3) + (x + 7))$ donc $A_2 = (x - 10)(3x + 4)$.
3. La deuxième identité remarquable permet de repérer un carré parfait en regroupant les deux premiers et le dernier termes de A_3 , ce qui permet d'achever la factorisation. Ainsi

$$\begin{aligned} A_3 &= (x^2 - 2x + 1) - (x - 1)(2x + 3) \\ &= (x - 1)^2 - (x - 1)(2x + 3) \\ &= (x - 1)((x - 1) - (2x + 3)) \\ &= -(x - 1)(x + 4). \end{aligned}$$

4. Dans chaque terme de A_4 , on voit apparaître les facteurs $2x + 5$ et $x + 2$, ces facteurs apparaissant parfois en utilisant la troisième identité remarquable. On calcule ainsi :

$$\begin{aligned} A_4 &= (2x - 5)(2x + 5)(x + 2) - (x - 2)(x + 2)(2x + 5) + 5(x + 2)(2x + 5) \\ &= (2x + 5)(x + 2)((2x - 5) - (x - 2) + 5) \\ &= (2x + 5)(x + 2)^2. \end{aligned}$$

Éléments de correction - Exercice 114

Pas de corrigé

Éléments de correction - Exercice 115

1. On a $n(n + 3) + 2 = n^2 + 3n + 2$. Le discriminant de ce trinôme est 1 et ses racines sont -1 et -2 , donc $n(n + 3) + 2 = (n + 1)(n + 2)$.
2. On note que $p = (n + 1)(n + 2) \times n(n + 3) = q(q - 2)$ d'après la relation de la question précédente.
3. On note que $p + 1 = q(q - 2) + 1 = q^2 - 2q + 1 = (q - 1)^2$. Ainsi, $p + 1$ est un carré parfait.

Éléments de correction - Exercice 116

Pas de corrigé

Éléments de correction - Exercice 117

1. On divise l'équation proposée par x^2 (on peut car $x \neq 0$, donc $x^2 \neq 0$) :

$$x^4 + 8x^3 + 2x^2 + 8x + 1 = 0 \text{ si et seulement si } x^2 + 8x + 2 + \frac{8}{x} + \frac{1}{x^2} = 0.$$

2. On a $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$.
3. Soit $x \neq 0$. On a $x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = u^2$ et $8x + \frac{8}{x} = 8u$, d'où

$$\begin{aligned} x^4 + 8x^3 + 2x^2 + 8x + 1 &= 0 \\ u^2 + 8u &= 0 \\ u(u + 8) &= 0 \\ u = 0 \text{ ou } u &= -8 \\ x + \frac{1}{x} = 0 \text{ ou } x + \frac{1}{x} &= -8. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} &= 0 \\ \frac{x^2 + 1}{x} &= 0 \\ x^2 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

et cette équation n'admet pas de solution réelle. De plus,

$$\begin{aligned}x + \frac{1}{x} &= -8 \\ \frac{x^2 + 1}{x} &= -8 \\ x^2 + 1 &= -8x \\ x^2 + 8x + 1 &= 0.\end{aligned}$$

On calcule le discriminant de ce trinôme puis on obtient que ses racines sont $-4 - \sqrt{15}$ et $-4 + \sqrt{15}$.

Finalement, puisque 0 n'est pas solution de l'équation, l'ensemble des solutions de l'équation est $\{-4 - \sqrt{15}, -4 + \sqrt{15}\}$.

Éléments de correction - Exercice 118

1. L'assertion est fausse. On a plutôt, pour tous $a, b \in \mathbf{R}$, $e^{a+b} = e^a \times e^b$.
2. L'assertion est fausse. On a plutôt, pour tous $a, b \in \mathbf{R}$, $e^{a+b} = e^a \times e^b$.
3. L'assertion est fausse : $\ln x$ existe si et seulement si $x > 0$.
4. L'assertion est vraie.
5. L'assertion est vraie.
6. L'assertion est fausse. On a plutôt, pour tous $a, b \in \mathbf{R}_+^*$, $b \ln(a) = \ln(a^b)$.
7. L'assertion est fausse. On a plutôt, pour tous $a, b \in \mathbf{R}_+^*$, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

Éléments de correction - Exercice 119

1. Soit $x \in \mathbf{R}$. On multiplie le numérateur et le dénominateur par e^{-x} .

$$\frac{e^x - 1}{e^x} = \frac{(e^x - 1)e^{-x}}{e^x e^{-x}} = \frac{e^0 - e^{-x}}{e^0} = 1 - e^{-x}$$

puisque $e^0 = 1$.

2. Soit $x \in \mathbf{R}$. On multiplie le numérateur et le dénominateur par $e^x - 1$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{e^x + 1} &= \frac{e^x - 1}{(e^x - 1)e^x + 1} \\ &= \frac{e^x - 1}{(e^x)^2 - 1} && \text{on utilise une identité remarquable au dénominateur} \\ &= \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 1}.\end{aligned}$$

3. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned}(e^x + e^{-x})(e^{2x})^2 &= (e^x + e^{-x})e^{4x} \\ &= (e^x + e^{-x})e^x e^{3x} \\ &= (e^{2x} + e^0)e^{3x} && \text{on développe } (e^x + e^{-x})e^x \\ &= (e^{2x} + 1)e^{3x}.\end{aligned}$$

Éléments de correction - Exercice 120

Pour cet exercice, il faut se rappeler du cours sur les suites géométriques.

Diminuer de 5% revient à multiplier par $1 - \frac{5}{100} = 0,95$. Donc si on note u_n la valeur sur le compte

au bout de n mois (pour $n \in \mathbf{N}$), on a donc $u_0 = 1\,000$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = 0,95 \times 1\,000$. D'après le cours sur les suites géométriques, on a donc, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 1\,000 \times 0,95^n$. Ainsi,

$$\begin{aligned} u_n &\leq 500 \\ 1\,000 \times 0,95^n &\leq 500 \\ 0,95^n &\leq \frac{500}{1\,000} \\ 0,95^n &\leq \frac{1}{2} \\ \ln(0,95^n) &\leq \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ n \ln(0,95) &\leq -\ln(2) \\ n &\geq \frac{-\ln(2)}{0,95} \qquad \text{on divise par } \ln(0,95) < 0 \end{aligned}$$

Ainsi, le nombre de mois cherché est le premier entier supérieur à $\frac{-\ln(2)}{0,95}$.

Éléments de correction - Exercice 121

1. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} f(x)^2 - g(x)^2 &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{(e^x)^2 + 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x)^2 - 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2}{4} \\ &= e^x e^{-x} \\ &= 1. \end{aligned}$$

2. Soit $x \in \mathbf{R}$. Ici, il y a essentiellement deux approches :

- on peut développer $2f(x)^2 - 1$ et obtenir $f(2x)$;
- on peut transformer $f(2x) - 1$ pour obtenir $2f(x)^2$.

La première approche nécessite de développer une expression, tandis que l'autre approche demande plutôt une factorisation. Factoriser étant plus difficile que développer, on privilégie l'approche n°1 !

$$\begin{aligned} 2f(x)^2 - 1 &= 2 \times \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - 1 \\ &= \frac{(e^x)^2 + 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2}{2} - 1 \\ &= \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x} - 2}{2} \\ &= \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} \\ &= f(2x). \end{aligned}$$

3. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} 2f(x)g(x) &= 2 \times \frac{e^x + e^{-x}}{2} \times \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &= \frac{(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})}{2} \\ &= \frac{(e^x)^2 - (e^{-x})^2}{2} \\ &= \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} \\ &= g(2x). \end{aligned}$$

Éléments de correction - Exercice 122

1. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} h(-x) &= \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{e^{-x} + e^{-(-x)}} \\ &= \frac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x} \\ &= -\frac{e^x - e^{-x}}{e^{-x} + e^x} \\ &= h(x). \end{aligned}$$

On rappelle qu'une fonction définie sur un intervalle centré en 0 vérifiant cette propriété est dite impaire. La fonction h est donc impaire.

2. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $h(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, où $u : x \mapsto e^x - e^{-x}$ et $v : x \mapsto e^x + e^{-x}$ sont des fonctions dérivables, avec $u' : x \mapsto e^x + e^{-x}$ et $v' : x \mapsto e^x - e^{-x}$. Ainsi, en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, h est dérivable et, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$h'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2}.$$

3. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} \\ &= \frac{(e^x + e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} \\ &= 1 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)^2 \\ &= 1 - h(x)^2. \end{aligned}$$

Éléments de correction - Exercice 123

1. Le discriminant de $2x^2 + x + 1$ est strictement positif, donc ce trinôme ne s'annule pas. Il s'ensuit que $D = \mathbf{R}$.

2. Soit $x \neq 0$. On a

$$f(x) = \frac{x^2(3 - \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2})}{x^2(2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})} = \frac{3 - \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}}{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}.$$

Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{3}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{3}{2}$. Ainsi, la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = \frac{3}{2}$ au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.

3. La fonction f est dérivable sur \mathbf{R} en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas et, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f'(x) = \frac{7x^2 + 14x}{(2x^2 + x + 1)^2} = \frac{7x(x + 2)}{(2x^2 + x + 1)^2}.$$

Ainsi, comme $f(-2) = 2$ et $f(0) = -2$,

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$7x$		-	0	+
$x + 2$		-	0	+
$f'(x)$		+	0	-
f	$\frac{3}{2}$	2	-2	$\frac{3}{2}$

4. La fonction f est continue sur \mathbf{R} en tant que quotient de fonctions polynomiales (donc continues) dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, f est strictement croissante sur $]-\infty; -2]$, donc d'après le théorème de la bijection, f établit une bijection de $]-\infty; -2]$ vers $f \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); f(-2) \right[= \left] \frac{3}{2}; 2 \right]$. Comme $\frac{7}{4} \in \left] \frac{3}{2}; 2 \right]$, on en déduit que l'équation $f(x) = \frac{7}{4}$ admet une unique solution sur $]-\infty; -2]$.
- De même, f établit une bijection de $]-2; 0[$ dans $]-2; 2[$. Comme $\frac{7}{4} \in]-2; 2[$, $f(x) = \frac{7}{4}$ admet une unique solution dans $]-2; 0[$.
- De la même façon, on a aussi que f établit une bijection de $[0; +\infty[$ dans $\left[-2; \frac{3}{2}\right[$. Comme $\frac{7}{4} \notin \left[-2; \frac{3}{2}\right[$, $f(x) = \frac{7}{4}$ n'admet pas de solution dans $[0; +\infty[$ (*ici le résultat est négatif, mais il est indispensable de l'écrire car il faut compter les antécédents de $\frac{3}{4}$ dans tous les intervalles où f est strictement monotone afin de prendre en compte tous les réels à la fin*).
- Finalement, $f(x) = \frac{3}{4}$ admet exactement deux solutions sur \mathbf{R} .

Éléments de correction - Exercice 124

1. f est dérivable sur \mathbf{R}_+^* et on a

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{-25x^2 - 15x - 1}{2\sqrt{x}}.$$

2. (a) On a $4 < 5 < 9$, donc $2 < \sqrt{5} < 3$ par stricte croissance de la fonction racine carrée, puis $-1 < -3 + \sqrt{5} < 0$. De plus, $-3 + (-\sqrt{5}) < 0$ en tant que somme de deux nombres strictement négatifs.
- (b) Soit $x > 0$. Le dénominateur de $f'(x)$ étant strictement positif, le signe de $f'(x)$ est celui de $-25x^2 - 15x - 1$. Or le discriminant de ce trinôme vaut 125 et ses racines sont $\frac{-3 + \sqrt{5}}{10}$, $\frac{-3 - \sqrt{5}}{10}$ (*on rappelle que $\sqrt{125} = \sqrt{25 \times 5} = 5\sqrt{5}$*). Ainsi, comme le signe du trinôme est négatif (signe de son coefficient dominant) sauf entre ses racines, et que ses racines sont toutes deux négatives,

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	
f	$-\frac{1}{2}$	$-\infty$

Éléments de correction - Exercice 125

1. On a

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x^5 + 1$	-	+	

donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$. De plus, par simples opérations, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
 Par ailleurs, la fonction est dérivable sur $\mathbf{R} \setminus \{-1\}$ et,

$$\forall x \neq -1, \quad f'(x) = \frac{-5x^4}{(x^5 + 1)^2}.$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$-5x^4$		-	-
$(x^5 + 1)^2$		+	+
$f'(x)$		-	-
f	$0 \rightarrow$	$-\infty$	$+\infty \rightarrow 0$

2. On a $5 \times \left(-\frac{1}{3}\right) - 2 < 0$ et

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
$3x + 1$		-	+

donc $\lim_{x \rightarrow -1/3^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1/3^+} f(x) = -\infty$. De plus, pour tout $x \notin \left\{0, -\frac{1}{3}\right\}$,

$$g(x) = \frac{x(5 - \frac{2}{x})}{x(3 + \frac{1}{x})} = \frac{5 - \frac{2}{x}}{3 + \frac{1}{x}}$$

donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \frac{5}{3}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{5}{3}$.

Par ailleurs, la fonction est dérivable sur $\mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}$ et,

$$\forall x \neq -\frac{1}{3}, \quad g'(x) = \frac{11}{(3x + 1)^2}.$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
$g'(x)$		+	+
g	$\frac{5}{3} \rightarrow$	$+\infty$	$-\infty \rightarrow \frac{5}{3}$

3. On a $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 > 0$ et :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x + 1$		-	+

donc $\lim_{x \rightarrow -1/2^-} h(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1/2^+} h(x) = +\infty$. De plus, pour tout $x \notin \left\{0, -\frac{1}{2}\right\}$,

$$h(x) = \frac{x^2(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2})}{x(2 + \frac{1}{x})} = \frac{x(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2})}{2 + \frac{1}{x}}$$

donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$.

Par ailleurs, la fonction h est dérivable sur $\mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ et,

$$\forall x \neq -\frac{1}{2}, \quad f'(x) = \frac{2x^2 + 2x - 5}{(2x + 1)^2}.$$

Après calcul du discriminant, on obtient que les racines de $2x^2 + 2x - 5$ sont $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{11}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{11}}{2}$. Or, le signe d'un trinôme est celui de son coefficient dominant (ici $2 > 0$), sauf entre ses racines. Donc,

x	$-\infty$	x_1	$-\frac{1}{2}$	x_2	$+\infty$
$h'(x)$		+	0	-	
h	$-\infty$	$h(x_1)$		$+\infty$	$+\infty$

Éléments de correction - Exercice 126

Pour la dernière question de cette exercice, il faut se rappeler du théorème d'encadrement (aussi appelé théorème des gendarmes) et du calcul de limites.

1. Introduisons $h : x \mapsto \ln(x) - (x - 1)$. La fonction h est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ et, pour tout $x > 0$,

$$h'(x) = \frac{1}{x} - 1.$$

Ainsi, pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} h'(x) &\geq 0 \\ \frac{1}{x} - 1 &\geq 0 \\ \frac{1}{x} &\geq 1 \\ x &\leq 1 \end{aligned}$$

on compose par la fonction inverse, décroissante sur \mathbf{R}_+^*

Ainsi, puisque $h(1) = \ln(1) - (1 - 1) = 0$,

x	0	-1	$+\infty$
$h'(x)$		+	-
h	0		

Le maximum de la fonction h étant 0, on en déduit que pour tout $x > 0$, $h(x) \leq 0$, ce qui signifie que $\ln(x) \leq x - 1$.

2. En particulier, pour tout $x > 0$

$$\begin{aligned} \ln(\sqrt{x}) &\leq \sqrt{x} - 1 \\ \text{donc } \frac{1}{2} \ln(x) &\leq \sqrt{x} - 1. \end{aligned}$$

Puisque l'inégalité de la question 1. est vraie pour tout nombre strictement positif x , on peut « remplacer » x par \sqrt{x} , qui est encore un nombre strictement positif.

3. Soit $x > 1$. Par stricte croissance de la fonction \ln on obtient $\ln(x) > \ln(1)$, puis $\ln(x) > 0$ et donc $\frac{1}{2} \ln(x) > 0$. En utilisant aussi la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{\ln(x)}{2} \leq \sqrt{x} - 1 \\ \text{donc } 0 &< \ln(x) \leq 2(\sqrt{x} - 1) && \text{on multiplie par } 2 \geq 0 \\ \text{donc } 0 &< \frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{2(\sqrt{x} - 1)}{x} && \text{on divise par } x > 0. \end{aligned}$$

4. Soit $x > 1$. On a

$$\frac{2(\sqrt{x} - 1)}{x} = 2 \frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{2}{x} = 2 \frac{\sqrt{x}\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} - \frac{2}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}.$$

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2(\sqrt{x} - 1)}{x} = 0$. En utilisant aussi la question précédente, on peut appliquer le théorème d'encadrement, qui assure que $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ admet une limite en $+\infty$, avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

Éléments de correction - Exercice 127

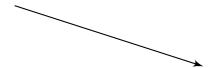
1. Introduisons la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x) - x$, qu'on étudie sur $[0; +\infty[$. La fonction f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et, pour tout $x \geq 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1.$$

Soit $x \geq 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) &\geq 0 \\ \frac{1}{1+x} - 1 &\geq 0 \\ \frac{1}{1+x} &\geq 1 && \text{on ajoute 1} \\ 1+x &\leq \frac{1}{1} && \text{on compose par la fonction inverse, décroissante sur } \mathbf{R}_+^* \\ x &\leq 0 && \text{on ajoute } -1 \end{aligned}$$

Ainsi, puisque $f(0) = \ln(1) - 0 = 0$,

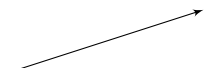
x	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	
f	0	

On a obtenu que le maximum de f sur $[0; +\infty[$ est 0, ce qui entraîne que pour tout $x \geq 0$, $f(x) \leq 0$. En particulier, pour tout $x > 0$, $\ln(1+x) - x \leq 0$.

2. On considère $g : x \mapsto \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$, sur $[0; +\infty[$. La fonction g est dérivable et, pour tout $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{1+x} - 1 + x \\ &= \frac{1 - (1+x) + x(1+x)}{1+x} \\ &= \frac{1 - 1 - x + x + x^2}{1+x} \\ &= \frac{x^2}{1+x} \end{aligned}$$

Donc, puisque $g(0) = \ln(1+0) - 0 - \frac{0^2}{2} = 0$,

x	0	$+\infty$
x^2	+	
$x+1$	+	
$g'(x)$	+	
g	0	

On a obtenu que le minimum de g sur $[0; +\infty[$ est 0, ce qui entraîne que pour tout $x \geq 0$, $g(x) \leq 0$. En particulier, pour tout $x > 0$, $\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \geq 0$.

3. Soit $x > 0$. En ajoutant x à l'inégalité de la question 1., on obtient $\ln(1+x) \leq x$. En ajoutant $x - \frac{x^2}{2}$ à l'inégalité de la question 2., on obtient $\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$.
4. On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} x - \frac{x^2}{2} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$, donc les inégalités de la question précédente et le théorème d'encadrement assurent que $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ admet une limite en 0^+ et que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 0$.

Éléments de correction - Exercice 128

On introduit $f : x \mapsto (1+x)^3 - 1 - 3x$. En développant, on obtient, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = 3x^2 + x^3$. La fonction f est dérivable et, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f'(x) = 6x + 3x^2 = 3x(2+x).$$

Donc, puisque $f(0) = 0$ et $f(-3) = 0$, on a :

x	$-\infty$	-3	-2	0	$+\infty$
$3x$		$-$	\vdots	$-$	$+$
$2+x$		$-$	0	\vdots	$+$
$f'(x)$		$+$	0	0	$+$
f					

On a obtenu que le minimum de f sur $[-3; +\infty[$ est 0, ce qui entraîne que pour tout $x \geq -3$, $f(x) \geq 0$, puis $(1+x)^3 \geq 1+3x$.

Autre solution. On a $f(x) = 3x^2 + x^3$. Or, si $x \geq -3$, alors par croissance la fonction cube, $x^3 \geq -27$. De plus, $x^2 \geq 9$, donc $3x^2 \geq 27$. En ajoutant les deux inégalités obtenues, on a $x^3 + 3x^2 \geq -27 + 27$, c'est-à-dire $f(x) \geq 0$, puis $(1+x)^3 \geq 1+3x$.

Éléments de correction - Exercice 129

1. Comme $1 \leq x \leq 3$. On a $2 \times 1 + 1 \leq 2x + 1 \leq 2 \times 3 + 1$, donc $3 \leq 2x + 1 \leq 7$. Puisque la fonction inverse est strictement décroissante sur $[3; 7]$, on en déduit

$$\frac{1}{7} \leq \frac{1}{2x+1} \leq \frac{1}{3}.$$

On peut multiplier ces inégalités par $4x + 1 > 0$:

$$\frac{4x+1}{7} \leq \frac{4x+1}{2x+1} \leq \frac{4x+1}{3}$$

puis, en utilisant $5 \leq 4x + 1 \leq 13$,

$$\frac{5}{7} \leq A \leq \frac{13}{3}.$$

Attention : on ne divise pas des inégalités (même si elles sont strictement positives) ! En règle général, on obtient un encadrement faux !

2. On a

$$A = \frac{2(2x+1) - 1}{2x+1} = 2 - \frac{1}{2x+1}.$$

On a montré que $\frac{1}{7} \leq \frac{1}{2x+1} \leq \frac{1}{3}$, donc $-\frac{1}{3} \leq -\frac{1}{2x+1} \leq -\frac{1}{7}$, puis $\frac{5}{3} \leq A \leq \frac{13}{7}$.

Éléments de correction - Exercice 130

1. Soit $x \in \mathbf{R}$. $f(x)$ existe si et seulement si $\frac{e^x - 1}{x} > 0$. Or

$$\begin{aligned} e^x - 1 &\geq 0 \\ e^x &\geq 1 \\ x &\geq \ln(1) \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

et de même, $e^x - 1 = 0 \iff x = 0$. Ainsi,

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x - 1$	-	0	+
x	-		+
$\frac{e^x - 1}{x}$	+		+

Ainsi, $f(x)$ si et seulement si $x \neq 0$. Donc f est définie sur \mathbf{R}^* .

2. h est dérivable sur \mathbf{R} en tant que somme de produits de fonctions dérivables sur \mathbf{R} . De plus, $h'(x) = (x - 1)e^x + e^x = xe^x$. On en déduit, puisque $h(0) = (0 - 1)e^0 + 1 = 0$,

x	$-\infty$	0	$+\infty$
e^x	+	+	+
x	-	0	+
$h'(x)$	-	0	+
h			

On a obtenu que 0 est le minimum de h . En particulier, $h(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

3. La fonction f est dérivable sur \mathbf{R}^* en tant que composée de fonctions dérivables et, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f'(x) = \frac{(x - 1)e^x + 1}{x(e^x - 1)} = \frac{h(x)}{x(e^x - 1)}$$

Avec la question précédente, on obtient :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h(x)$	+	0	+
x	-		+
$e^x - 1$	-		+
$f'(x)$	+		+
f			

4. Soit $x \in \mathbf{R}^*$.

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln\left(\frac{e^{-x} - 1}{-x}\right) \\ &= \ln(e^{-x} - 1) - \ln(-x) \\ &= \ln\left(\frac{1}{e^x} - 1\right) - \ln(-x) \\ &= \ln\left(\frac{1 - e^x}{e^x}\right) - \ln(-x) \\ &= \ln(1 - e^x) - \ln(-x) - \ln(e^x) \\ &= \ln\left(\frac{1 - e^x}{-x}\right) - x \\ &= f(x) - x. \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} f(x) &\geq 0 \\ \frac{e^x - 1}{x} &\geq 1 \\ \frac{e^x - 1 - x}{x} &\geq 0 \\ \frac{e^x - x - 1}{x} &\geq 0. \end{aligned}$$

Or $e^x - x - 1 \geq 0$ d'après l'indication, donc $f(x)$ est du signe de x . Ainsi, $f(x) - x$ est du signe de $-x$, donc $f(x) - x \geq 0$ si et seulement si $x \leq 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - x$		$-$	$+$