ANNEE SCOLAIRE 2023/2024 Devoir maison $n°0$ A rendre le 02/09/2024	Lycée Jean Jacques ROUSSEAU Sarcelles

1 Échauffements

▷ **Exercice 1 :**

1. Mettre chacune des expressions suivantes sous la sous la forme $a \times q^n$.
   (a) $\dfrac{2^{n-1}}{3^{3n}} \times \frac{1}{5^{n+1}}$, (b) $\dfrac{-2^n}{7^n} \times \frac{(-3)^n}{5^{2n+1}}$, (c) $\dfrac{1}{4^n} \times \frac{1}{8^n}$, (d) $\dfrac{5^{\frac{n}{2}}}{3^{n+1}}$.
2. Factoriser les expressions suivantes le plus possible.
   (a) $2x + x^2$,
   (b) $e^x + e^{2x}$,
   (c) $1 - x^2$,
   (d) $(1-2p)^{n-1} - 2n(1-p)^n$,
   (e) $1 - q^3$.

1. (a) $\frac{2^{n-1}}{3^{3n}} \frac{1}{5^{n+1}} = \frac{\frac{1}{2}2^n}{(3^3)^n} \frac{1}{5.5^n} = \frac{1}{2}\frac{1}{5}\frac{2^n}{27^n.5^n} = \frac{1}{10}\left(\frac{2}{135}\right)^n$
   (b) $\frac{-2^n}{7^n}\frac{(-3)^n}{5^{2n+1}} = -\frac{2^n}{7^n}\frac{(-3)^n}{5\times 25^n} = \frac{-1}{5}\left(-\frac{6}{175}\right)^n$
   (c) $\frac{1}{4^n}\frac{1}{8^n} = \frac{1}{32^n} = \left(\frac{1}{32}\right)^n$
   (d) $\frac{5^{\frac{n}{2}}}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{5}^n}{3^n} = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^n$.
2. (a) $2x + x^2 = x(x+2)$
   (b) $e^x + e^{2x} = e^x(1 + e^x)$
   (c) $1 - x^2 = 1^2 - x^2 = (1-x)(1+x)$
   (d) $(1-2p)^{n-1} - 2n(1-p)^n$ ne se factorise pas car aucun des facteurs des deux termes de la différence ne sont communs.
   (e) Pour factoriser $1 - q^3$ on considère le polynôme $1 - X^3$. On observe que 1 est une racine évidente et on réalise la division euclidienne de $-X^3 + 1$ par $X - 1$. On a

$$\begin{array}{rr|l} -x^3 & +1 & x-1 \\ \cline{3-3} -(-x^3+x^2) & & -x^2-x-1 \\ \hline -x^2 & +1 & \\ -(-x^2+x) & & \\ \hline & -x+1 & \\ & -(-x+1) & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

On a alors que $-X^3 + 1 = (X-1)(-X^2 - X - 1) = -(X-1)(X^2 + X + 1) = (1-X)(X^2+X+1)$ or le discriminant du trinôme $X^2 + X + 1$ est $1^2 - 4.1.1 = -3$ qui est strictement négatif, ce trinôme ne se factorise pas plus. On a donc

$$1 - q^3 = (1-q)(1+q+q^2).$$

▷ **Exercice 2 :**

1. Résoudre les équations suivantes :
   (a) $3x+1=4x-2$, (b) $-x+1=x+2$, (c) $x+1=x-3$, (d) $2x+7=-5x$.
2. Résoudre les équations suivantes :
   (a) $3e^x+1=4e^x-2$, (b) $-e^x+1=e^x+2$, (c) $e^x+1=e^x-3$, (d) $2e^x+7=-5e^x$.
3. Résoudre les équations suivantes :
   (a) $3\ln(x)+1=4\ln(x)-2$, (b) $-\ln(x)+1=\ln(x)+2$, (c) $\ln(x)+1=\ln(x)-3$, (d) $2\ln(x)+7=-5\ln(x)$.

1. (a) $3x+1=4x-2 \Leftrightarrow -x=-3 \Leftrightarrow x=3$
   (b) $-x+1=x+2 \Leftrightarrow -2x=1 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$
   (c) $x+1=x-3 \Leftrightarrow 1=-3$ donc l'équation n'admet pas de solution.
   (d) $2x+7=-5x \Leftrightarrow 7x+7=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$.
2. Les équations étant les mêmes que précédemment en substituant l'inconnue par e^x, on a :
   (a) $3e^x+1=4e^x-2 \Leftrightarrow -e^x=-3 \Leftrightarrow e^x=3 \Leftrightarrow x=\ln(3)$
   (b) $-e^x+1=e^x+2 \Leftrightarrow -2e^x=1 \Leftrightarrow e^x=-\frac{1}{2}$ or une exponentielle est toujours strictement positive donc cette équation n'admet pas de solution.
   (c) $e^x+1=e^x-3 \Leftrightarrow 1=-3$ donc l'équation n'admet pas de solution.
   (d) $2e^x+7=-5e^x \Leftrightarrow 7e^x+7=0 \Leftrightarrow e^x+1=0 \Leftrightarrow e^x=-1$ or une exponentielle est toujours strictement positive donc cette équation n'admet pas de solution.
3. Les équations étant les mêmes que précédemment en substituant l'inconnue par $\ln(x)$, on a :
   (a) $3\ln(x)+1=4\ln(x)-2 \Leftrightarrow -\ln(x)=-3 \Leftrightarrow \ln(x)=3 \Leftrightarrow x=e^3$
   (b) $-\ln(x)+1=\ln(x)+2 \Leftrightarrow -2\ln(x)=1 \Leftrightarrow \ln(x)=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=e^{\frac{-1}{2}}$
   (c) $\ln(x)+1=\ln(x)-3 \Leftrightarrow 1=-3$ donc l'équation n'admet pas de solution.
   (d) $2\ln(x)+7=-5\ln(x) \Leftrightarrow 7\ln(x)+7=0 \Leftrightarrow \ln(x)+1=0 \Leftrightarrow \ln(x)=-1 \Leftrightarrow x=e^{-1}$.

2 Fonctions

▷ **Exercice 3 :** Déterminer, si elles existent, les limites suivantes en **justifiant soigneusement**.

1. $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^x}{x}$,
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln(x)$,
3. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x}$,
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^{-x}}{x}$,
5. $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x)e^x$.

1. On a $\lim\limits_{x\to 0^-} e^x = e^0 = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} x = 0^-$ donc par quotient, on a $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^x}{x} = -\infty$.

2. On a $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ donc par produit $\lim_{x\to+\infty} x\ln(x) = +\infty$.
3. On a $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to 0^+} x = 0^+$ donc par quotient, on a $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$.
4. On a $\lim_{x\to+\infty} -x = -\infty$ donc par composition avec l'exponentielle qui est continue, on a $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim_{t\to-\infty} e^t = 0$. De plus, $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ donc par quotient, on a $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{x} = 0$.
5. On a $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to 0^+} e^x = e^0 = 1$ donc par produit on a $\lim_{x\to 0^+} \ln(x)e^x = -\infty$.

▷ **Exercice 4 :** Pour chaque fonction, déterminer l'ensemble de dérivabilité et calculer la dérivée.

1. $x \mapsto \frac{\ln(x)}{2}$,
2. $x \mapsto \frac{1}{\ln(x)}$,
3. $x \mapsto xe^{-x}$,
4. $x \mapsto \frac{x}{e^x}$.
5. $x \mapsto \frac{x^2\ln(x) - x}{x}$.

On appellera dans chaque question f le fonction qu'on étudiera.

1. La fonction logarithme est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et la multiplication par la constante $\frac{1}{2}$ ne change pas le caractère dérivable de f. f est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a
$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{x} = \frac{1}{2x}.$$
2. La fonction logarithme est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et ne s'annule que en 1. On en déduit donc que par quotient f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$, on a :
$$f'(x) = -\frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)^2} = \frac{-1}{x\ln(x)^2}.$$
3. $x \mapsto x$ et $x \mapsto -x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ en tant que polynômes et est à valeurs dans $\mathbb{R}$ donc par composition avec l'exponentielle qui est dérivable $x \mapsto e^{-x}$ est également dérivable sur $\mathbb{R}$. Par produit, on a donc que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = 1e^{-x} + x(-e^{-x}) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}.$$
4. On observe que $\frac{x}{e^x} = xe^{-x}$ donc f est exactement la même fonction que dans la question précédente. f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = (1-x)e^{-x}.$$
5. $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x$ sont des polynômes donc dérivables sur $\mathbb{R}$ donc également sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme la fonction logarithme est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ on a par produit et somme $x \mapsto x^2\ln(x) - x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus $x \mapsto x$ ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}_+^*$ donc par quotient f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x\ln(x) + x^2\frac{1}{x} - 1)x - (x^2\ln(x) - x).1}{x^2} \\ &= \frac{2x^2\ln(x) + x^2 - x - x^2\ln(x) + x}{x^2} = \frac{x^2\ln(x) + x^2}{x^2} \\ &= \ln(x) + 1. \end{aligned}$$

▷ **Exercice 5 :** Trouver une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto 2xe^{x^2}$;
2. $x \mapsto e^x e^{e^x}$;
3. $x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$;
4. $x \mapsto \frac{e^x}{e^x+2}$;
5. $x \mapsto -e^{1-x}$
6. $x \mapsto (x-1)e^{(x-1)^2}$;
7. $x \mapsto \frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}$;
8. $x \mapsto \frac{6x+1}{3x^2+x+1}$;
9. $x \mapsto 3xe^{x^2}$;
10. $\frac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$;
11. $x \mapsto \frac{\ln(x)+1}{x\ln(x)+1}$;
12. $x \mapsto \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

On note f la fonction et F une primitive pour chaque question.

1. $F : x \mapsto e^{x^2}$
2. $F : x \mapsto e^{e^x}$
3. $F : x \mapsto \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$ car $f(x) = \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1}$.
4. $F : x \mapsto \ln(e^x+2)$
5. $F : x \mapsto e^{1-x}$
6. $F : x \mapsto \frac{1}{2}e^{(x-1)^2}$ car $f(x) = \frac{1}{2}2.1.(x-1)^{2-1}e^{(x-1)^2}$.
7. $F : x \mapsto \ln(e^{x^2}+1)$
8. $F : x \mapsto \ln(|3x^2+x+1|)$
9. $F : x \mapsto \frac{3}{2}e^{x^2}$ car $f(x) = \frac{3}{2}2xe^{x^2}$.
10. $F : x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$
11. $F : x \mapsto \ln(|x\ln(x)+1|)$ car la dérivée de $u : x \mapsto x\ln(x)+1$ est $u'(x) = \ln(x)+x\frac{1}{x} = \ln(x)+1$
12. $F : x \mapsto \ln(e^x+e^{-x})$.

▷ **Exercice 6 :**

1. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire.
2. On considère la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x) = \frac{3}{2}\ln(x+1)$. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $[1,2]$. On pourra utiliser le fait que $7 < e^2 < 8$.

1. Théorème des valeurs intermédiaires : Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$. Soit y compris entre $f(a)$ et $f(b)$ alors il existe au moins un antécédent à y, c'est-à-dire qu'il existe au moins un $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = y$.
Corollaire : Soit f une fonction continue strictement monotone sur $[a,b]$, alors pour tout $y \in [\min_{t\in[a,b]} f(t), \max_{t\in[a,b]} f(t)]$ il existe un unique antécédent $x \in [a,b]$ de y. Autrement dit :
$$\forall y \in \left[\min_{t\in[a,b]} f(t), \max_{t\in[a,b]} f(t)\right] \exists! x \in [a,b], f(x) = y.$$
2. On pose $g : \begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)-x \end{array}$. Étudier l'équation $f(x) = x$ est équivalent à étudier l'équation $g(x) = 0$.
On a que g est dérivable sur $]-1,+\infty[$ car $x \mapsto 1+x$ est dérivable en tant que polynôme et est à valeur strictement positive sur $]-1,+\infty[$ donc par composition avec la fonction logarithme dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, on a que f est dérivable sur $]-$

$1, +\infty[$. Par somme avec un polynôme, g est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et pour tout $x \in]-1, +\infty[$, on a

$$g'(x) = \frac{3}{2}\frac{1}{x+1} - 1 = \frac{3}{2x+2} - \frac{2x+2}{2x+2} = \frac{-2x+1}{2x+2}.$$

On a $-2x+1 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$ donc on en déduit le tableau de variation de g suivant :

x	-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$-2x+1$		$+$	0	$-$	
$2x+2$	0	$+$		$+$	
$g'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right) - 1$	$\searrow$	$-\infty$

(La limite en $+\infty$ s'obtient par croissance comparée.) La fonction g est donc continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $[1, 2]$. De plus $g(1) = \frac{3}{2}\ln(2) - 1 = \frac{3\ln(2)-2}{2} = \frac{\ln(8)-2}{2} \geq 0$ car $2 \leq \ln(8)$ par l'énoncé. De même $g(2) = \frac{3}{2}\ln(3) - 2 = \frac{\ln(27)-4}{2} = \frac{\ln(27)-\ln(e^4)}{2} = \frac{\ln\left(\frac{27}{e^4}\right)}{2} \leq 0$ puisque $\frac{27}{e^4} < 1$. On a donc par corollaire du théorème des valeurs intermédiaire l'existence d'un unique réel $\alpha \in [1, 2]$ tel que $g(\alpha) = 0$ soit l'existence d'un unique réel $\alpha \in [1, 2]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$

3 Suites et séries

▷ **Exercice 7 :**

1. Que peut-on dire d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ croissante et majorée par 2 ? On citera précisément le théorème utilisé.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = (1-x)^3 + x.$$

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $u_0 = 0.4$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) i. Dresser le tableau de variations de f.

ii. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.

(b) Monter que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

(c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle ?

1. Une telle suite est convergente de limite l avec $l \leq 2$ par le théorème de la limite monotone.
   Le théorème exact est :
   — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite majorée par un réel M et croissante alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq M$.
   — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite minorée par un réel m et décroissante alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geq m$.
2. (a) i. f est un polynôme donc f est bien dérivable sur $\mathbb{R}$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 3(-1)(1-x)^2 + 1 = -3(1-2x+x^2)+1 = -3x^2+6x-2.$$

Le discriminant de ce trinôme est $6^2 - 4(-3)(-2) = 36 - 24 = 12$ qui est strictement positif donc admet deux racines distinctes qui sont $\alpha = \frac{-6+\sqrt{12}}{-6} = \frac{6-2\sqrt{3}}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ et $\beta = \frac{-6-\sqrt{12}}{-6} = \frac{6+2\sqrt{3}}{6} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$.
On a

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \left(1 - \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)^3 + 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{27} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{9} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}+9-3\sqrt{3}}{9} = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{9} > 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f(\beta) &= \left(1 - \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)^3 + 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \\ &= \frac{-3\sqrt{3}}{27} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{9} + 1 - = + \frac{\sqrt{3}}{3} \\ &= \frac{-\sqrt{3}+9+3\sqrt{3}}{9} = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{9} \end{aligned}$$

De plus on a par la formule de binôme $f(x) = 1 - 3x + 3x^2 - x^3 + 1 = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
On en déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$1-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$	$1+\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	$-\infty$

ii. Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.

— Initialisation : Par hypothèse, $u_0 = 0,4$ qui est trivialement strictement entre 0 et 1 donc l'inégalité est bien initialisée.

— Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque et supposons que l'inégalité est vraie au rang n et montrons là au rang $n+1$. Autrement dit supposons que $0 < u_n < 1$ et montrons que $0 < u_{n+1} < 1$.
On observe que $\alpha \in]0,1[$ et réalisons une disjonction de cas :

— Si $u_n \in]0, \alpha]$, comme f est strictement décroissante sur $[0, \alpha]$, on a $f(0) > f(u_n) > f(\alpha)$ or $f(0) = 1$ et $f(\alpha) > 0$ donc on a $1 > u_{n+1} > 0$.

— Si $u_n \in]\alpha, 1[$, comme f est strictement croissante sur $[\alpha, 1]$, on a $f(\alpha) < f(u_n) < f(1)$ or $f(1) = 1$ et $f(\alpha) > 0$ donc on a $0 < u_{n+1} < 1$.

Dans tout les cas, on a bien $0 < u_{n+1} < 1$ ce qui montre notre hérédité.

— Conclusion : L'inégalité est initialisée au rang 0 et est héréditaire à partir de ce rang donc par le principe de récurrence on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et étudions le signe de $u_{n+1} - u_n$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n &= (1-u_n)^3 + u_n - u_n \\ &= (1-u_n)^3 > 0 \end{aligned}$$

car par la question précédente, $1 - u_n > 0$ et que le cube d'un réel (strictement) positif est (strictement) positif. On en déduit donc que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien (strictement) croissante.

(c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1 donc par le théorème de la limite monotone, on a que la suite u_n est convergente vers un réel l et que $l \geq 1$. (On pourrait montrer que $l = 1$ ici.)

▷ **Exercice 8 :**

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_n en fonction de n.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \text{ et } u_1 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_n en fonction de n.

1. On reconnait ici une suite arithmético-géométrique. Commençons par déterminer le point fixe l de la relation de récurrence :

$$l = 2l - 3 \Leftrightarrow -l = -3 \Leftrightarrow l = 3$$

On pose à présent $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 3 = 2u_n - 3 - 3 = 2u_n - 6 \\ &= 2(u_n - 3) = 2v_n. \end{aligned}$$

On en déduit donc que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = u_0 - 3 = 2 - 3 = -1$. On a alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -2^n$. On a ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = v_n + 3 = 3 - 2^n.$$

2. On reconnait ici une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique associée $x^2 - 5x + 4$.
   Le discriminant de l'équation caractéristique est $\Delta = (-5)^2 - 4.1.4 = 25 - 16 = 9 = 3^2$ donc elle admet deux solutions distinctes qui sont $\frac{5+3}{2} = 4$ et $\frac{5-3}{2} = 1$.
   On en déduit donc qu'il existe deux réels λ et μ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda 4^n + \mu 1^n = \lambda 4^n + \mu$. Déterminons λ et μ en résolvons un système à l'aide de u_0 et u_1 :

$$\begin{cases} \lambda 4^0 + \mu = u_0 \\ \lambda 4^1 + \mu = u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ 4\lambda + \mu = 3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 2 - \lambda \\ 4\lambda + 2 - \lambda = 3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 2 - \lambda \\ 3\lambda = 1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \frac{5}{3} \\ \lambda = \frac{1}{3} \end{cases}$$

   On a donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{4^n + 5}{3}.$$

▷ **Exercice 9 :** Étudier la nature des séries suivantes et, le cas échéant, calculer leur somme.

1. $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{7^{n-1}}$.
2. $\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{(n+1)!}$.
3. $\sum_{n\geq 0} \frac{2n^3-3n^2+1}{(n+3)!}$.
   Indication : montrer que $2n^3 - 3n^2 + 1 = 2(n+3)(n+2)(n+1) - 15(n+3)(n+2) + 53(n+3) - 80$.

1. On reconnait une série géométrique dérivée première de raison $\frac{1}{7}$ qui est dans $]-1, 1[$ donc convergente. On a ainsi :

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{1}{7}\right)^{n-1} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{7}\right)^2} = \frac{1}{\frac{6^2}{7^2}} = \frac{49}{36}.$$

2. On observe que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{2^n}{(n+1)!} = \frac{1}{2}\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{2}\frac{2^k}{k!}$ où $k = n + 1$. On reconnait, à un changement d'indice près le terme général d'une série

exponentielle qui est convergente. La série est donc convergente et on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(n+1)!}&=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{k!}=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{k!}-\frac{2^0}{0!}\right)\\&=\frac{1}{2}(e^2-1)=\frac{e^2-1}{2}\end{aligned}$$

3. On a pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}&2(n+3)(n+2)(n+1)-15(n+3)(n+2)+53(n+3)-80\\&\qquad=2(n^2+5n+6)(n+1)-15(n^2+5n+6)+53n+159-80\\&\qquad=2(n^3+5n^2+6n+n^2+5n+6)-15n^2-75n-90+53n+79\\&\qquad=2(n^3+6n^2+11n+6)-15n^2-22n-11\\&\qquad=2n^3+12n^2+22n+12-15n^2-22n-11\\&\qquad=2n^3-3n^2+1\end{aligned}$$

On en déduit donc que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\frac{2n^3-3n^2+1}{(n+3)!}&=\frac{2(n+3)(n+2)(n+1)-15(n+3)(n+2)+53(n+3)-80}{(n+3)!}\\&=2\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{(n+3)!}-15\frac{(n+3)(n+2)}{(n+3)!}+53\frac{(n+3)}{(n+3)!}-80\frac{1}{(n+3)!}\\&=2\frac{1}{n!}-15\frac{1}{(n+1)!}+53\frac{1}{(n+2)!}-80\frac{1}{(n+3)!}\end{aligned}$$

On reconnait une somme de termes généraux de séries exponentielles (à changement d'indice linéaire près) donc la série de terme général $\frac{2n^3-3n^2+1}{(n+3)!}$ est convergente. On a de plus :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n^3-3n^2+1}{(n+3)!}&=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}-15\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}+53\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)!}-80\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+3)!}\\&=2e-15\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}+53\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}-80\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k!}\\&=2e-15\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}-\frac{1}{0!}\right)+53\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}-\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}\right)-80\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}-\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}\right)\\&=2e-15(e-1)+53(e-1-1)-80\left(e-1-1-\frac{1}{2}\right)\\&=2e-15e+15+53e-106-80e+160+40\\&=(2-15+53-80)e+15-106+200\\&=-40e+109\end{aligned}$$

▷ **Exercice 10 :** Calculer les sommes suivantes.

1. $\sum_{k=2}^{10}(2k-3)$;
2. $\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{2^{20}}+\frac{1}{2^{30}}+\cdots++\frac{1}{2^{1000}}$;
3. $\sum_{n=3}^{11}(n^2-3n+4)$;
4. $\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{k-1}}{3^{k+1}}$;
5. $\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

Dans cette exercice on ne regarde que des sommes finies, il n'y a donc aucun problème de convergence.

1.

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{10}(2k-3) &= 2\sum_{k=2}^{10}k-3\sum_{k=2}^{10}1\\ &= 2\left(\left(\sum_{k=1}^{10}k\right)-1\right)-3(10-2+1)\\ &= 2\left(\frac{10(10+1)}{2}-1\right)-3.9\\ &= 2(55-1)-27=108-27=81\end{aligned}$$

par utilisation de la somme des entiers.

2.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{2^{20}}+\frac{1}{2^{30}}+\cdots+\frac{1}{2^{1000}} &= \sum_{k=1}^{100}\frac{1}{2^{10k}}=\sum_{k=1}^{100}\left(\frac{1}{2^{10}}\right)^k\\ &= \frac{1}{2^{10}}\frac{1-\left(\frac{1}{2^{10}}\right)^{100}}{1-\frac{1}{2^{10}}}\\ &= \frac{1-\frac{1}{2^{1000}}}{2^{10}-1}\end{aligned}$$

par utilisation de la somme des termes d'une suite géométrique.

3.

$$\begin{aligned}\sum_{n=3}^{11}(n^2-3n+4) &= \sum_{n=0}^{11}(n^2-3n+4)-((0-0+4)+(1-3+4)+(4-6+4))\\ &= \sum_{n=0}^{11}n^2-3\sum_{n=0}^{11}n+4\sum_{n=0}^{11}1-8\\ &= \frac{11(11+1)(2.11+1)}{6}-3\frac{11(11+1)}{2}+4(11-0+1)-8\\ &= \frac{11.12.23}{6}-3\frac{11.12}{2}+4.12-8\\ &= 11.2.23-3.11.6+48-8=11.46-11.18+40=11(46-18)+40\\ &= 11.28+40=308+40=348\end{aligned}$$

par sommes des entiers et des carrés.

4.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{k-1}}{3^{k+1}} &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{2^k}{3^k}=\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k\\ &= \frac{1}{6}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{1}{6}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}\right)\end{aligned}$$

par somme des termes d'une suite géométrique.

5.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \\
&= \sum_{j=2}^{n+1} \ln(j) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \\
&= \left(\sum_{j=2}^{n} \ln(j) + \ln(n+1)\right) - \left(\ln(1) + \sum_{k=2}^{n} \ln(k)\right) \\
&= \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1).
\end{aligned}$$

par somme télescopique.

▷ **Exercice 11 :** On considère la série de terme général donné par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{n^3 + 2n^2 - 4n + 1}{n!}.$$

1. Déterminer des réels a, b, c, d tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n^3 + 2n^2 - 4n + 1 = a + bn + cn(n-1) + dn(n-1)(n-2).$$

2. En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge et calculer sa somme.

1. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. On a :

$$\begin{aligned}
a + bn + cn(n-1) + dn(n-1)(n-2) &= a + bn + c(n^2 - n) + d(n^3 - 3n^2 + 2n) \\
&= a + bn + cn^2 - cn + dn^3 - 3dn^2 + 2dn \\
&= dn^3 + (c - 3d)n^2 + (b - c + 2d)n + a
\end{aligned}$$

Pour avoir l'égalité polynomiale recherché, on doit avoir égalité de tout les coefficients, on obtient donc que le quadruplet (a, b, c, d) est solution du système :

$$\begin{cases} d = 1 \\ c - 3d = 2 \\ b - c + 2d = -4 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 1 \\ c = 2 + 3 = 5 \\ b = -4 - 2 + 5 = -1 \\ a = 1 \end{cases}$$

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n^3 - 2n^2 - 4n + 1 = 1 - n + 5n(n-1) + n(n-1)(n-2).$$

2. Soit $n \geq 3$ et on a à l'aide de la question précédente :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1-n+5n(n-1)+n(n-1)(n-2)}{n!} \\ &= \frac{1}{n!} - \frac{n}{n!} + 5\frac{n(n-1)}{n!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{n!} \\ &= \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n-1)!} + 5\frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-3)!} \end{aligned}$$

On reconnait, à changement d'indice linéaire près, que u_n est la somme de termes généraux de séries exponentielles convergentes donc la série de terme général u_n est également convergente.
On a $u_0 = \frac{0+0-0+1}{0!} = 1$, $u_1 = \frac{1+2-4+1}{1!} = 0$ et $u_2 = \frac{8+8-8+1}{2!} = \frac{9}{2}$. On en déduit donc :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} u_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \sum_{n=3}^{\infty} u_n \\ &= 1 + 0 + \frac{9}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n-1)!} + 5\frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-3)!} \right) \\ &= \frac{11}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + 5\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-3)!} \\ &= \frac{11}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} + 5\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \\ &= \frac{11}{2} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} \right) - \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} \right) + 5\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} - \frac{1}{0!} \right) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \\ &= \frac{11}{2} + (e - 1 - 1 - \frac{1}{2}) - (e - 1 - 1) + 5(e-1) + e \\ &= e - e + 5e + e + \frac{11}{2} - \frac{5}{2} + 2 - 5 \\ &= 6e \end{aligned}$$

4 Probabilités

▷ **Exercice 12 :**

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$.
   (a) Rappeler la définition d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p, son espérance et sa variance.
   (b) On considère une équipe de n tireurs à la carabine qui cherchent à atteindre une cible éloignée. Chaque tireur tire deux fois. Pour un tireur donné, la probabilité de toucher la cible au premier tir est p et celle de toucher la cible au second tir est aussi égale à p. On suppose qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui modélise cette expérience de sorte que les tireurs et les lancers sont indépendants. On note A la variable aléatoire qui donne le nombre de joueurs qui touchent la cible au premier et au deuxième coup. Donner la loi de A **en justifiant soigneusement**.

2. Soit $p \in]0,1[$.
   (a) Rappeler la définition d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p, son espérance et sa variance.
   (b) Une urne contient a boules blanches et b boules noires. On effectue une infinité de tirages avec remise et on note X la variable aléatoire égale au rang de tirage de la première boule blanche. Reconnaître la loi de X.
3. Rappeler la définition d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, son espérance et sa variance.

1. (a) Soit X une variable aléatoire discrète, $n \in \mathbb{N}$ et $p \in]0,1[$. On dit que X suit une loi binomiale de paramètre n, p lorsque $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.
   On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.
   Une telle loi X admet une espérance et une variance qui sont
   $$\mathbb{E}(X) = np \text{ et } \mathbb{V}(X) = np(1-p).$$
   (b) Calculons pour commencer la probabilité qu'un tireur touche la cible sur les deux coups. Les lancers étant indépendants, cette probabilité est le produit de la probabilité de toucher au premier coup et de toucher au deuxième coup, soit $p \times p = p^2$.
   A est une variable aléatoire qui compte le nombre de tireur parmi n qui touche deux fois la cible sur deux lancers. En considérant le fait de toucher deux fois la cible sur deux lancer comme la réussite à l'épreuve de deux tirs successifs et le fait que chaque tireur est indépendant, A revient à compter le nombre de succès parmi n répétitions de la même épreuve. On en déduit donc que A suit une loi binomiale de paramètres p^2 et n, soit $A \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p^2)$.
2. (a) Soit X une variable aléatoire réelle et soit $p \in]0,1[$. On dit que X suit une loi géométrique de paramètre p si X correspond au rang du premier succès d'une expérience de Bernoulli sans mémoire.
   On note une telle loi $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.
   On a également $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=k) = p(1-p)^{k-1}$.
   On a qu'une telle loi admet une espérance et une variance qui sont
   $$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \text{ et } \mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$
   (b) La probabilité de tirer une balle blanche à un tirage est $\frac{a}{a+b}$ car le tirage des balles est uniforme. On reconnait pour X une loi géométrique de paramètre $\frac{a}{a+b}$.
3. Soit X une variable aléatoire réelle et soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que X suit une loi de Poisson de paramètre λ si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X=n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$.
   On note une telle loi $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.
   Une telle loi admet une espérance et une variance qui sont
   $$\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = \lambda.$$

▷ **Exercice 13 :**

1. Donner la définition d'un système complet d'événements.
2. Énoncer la formule des probabilités totales.
3. Une information est transmise à l'intérieur d'une population. A chaque étape, avec une probabilité p, c'est l'information correcte qui est transmise d'une personne à une autre. Avec une probabilité $1-p$, c'est l'information contraire qui est transmise. On note I_n l'événement « l'information après n transmissions est correcte » et $p_n = P(I_n)$.
   (a) Justifier que $(I_n, \overline{I}_n)$ est un système complet d'événements.
   (b) En déduire une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.
   (c) En déduire la valeur de p_n en fonction de p et de n.

1. Soit I un ensemble fini ou dénombrable et soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'évènements d'un univers Ω. On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est un système complet d'évènements lorsque :
   — $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \Omega$;
   — $\forall (i,j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$.
2. Donnons "pour le plaisir" les deux formes des probabilités totales :
   Théorème : [Formule des probabilités totales 1] Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, soit I une partie (fini ou dénombrable) de $\mathbb{N}$ et soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'évènements. On a alors pour tout évènement B :
   $$\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i \cap B)$$
   Théorème : [Formule des probabilités totales 2] Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, soit I une partie (fini ou dénombrable) de $\mathbb{N}$ et soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'évènements tel que $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$ pour tout $i \in I$. On a alors pour tout évènement B :
   $$\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B)$$
3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition d'un évènement contraire, on a $I_n \cap \overline{I_n} = \emptyset$ et $I_n \cup \overline{I_n} = \Omega$ donc $(I_n, \overline{I}_n)$ est un système complet d'évènements.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et calculons $\mathbb{P}(I_{n+1})$ à l'aide de la formule des probabilités totales. On a que (I_n, I_{n+1}) est un système complet d'évènement donc
   $$\mathbb{P}(I_{n+1}) = \mathbb{P}(I_n \cap I_{n+1}) + \mathbb{P}(\overline{I_n} \cap I_{n+1}).$$
   $\mathbb{P}(I_n \cap I_{n+1})$ correspond à la probabilité que l'information soit correct à la transmission n et $n+1$, autrement dit correcte à la transmission n et que la transmission suivante soit juste. Comme les transmissions sont indépendantes les unes des autres, on a $\mathbb{P}(I_n \cap I_{n+1}) = p_n.p$
   De même, $\mathbb{P}(\overline{I_n} \cap I_{n+1})$ correspond à la probabilité que l'information soit fausse après n transmissions mais deviennent correct à la transmission suivante, soit que le résultat de n transmissions soient fausses et que la $n+1$ ème inverse l'information. On a donc $\mathbb{P}(\overline{I_n} \cap I_{n+1}) = (1-p_n)(1-p) = 1-p-p_n(1-p)$.
   On en déduit donc
   $$p_{n+1} = \mathbb{P}(I_{n+1}) = p_n p + 1 - p - p_n(1-p) = p_n(2p-1) + 1 - p.$$

(c) On reconnait que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique de premier terme $p_0 = 1$ (car l'information est intacte lorsque aucune transition à été faite).
Déterminons le point fixe l de la relation de récurrence.

$$l = (2p-1)l+1-p \Leftrightarrow l-(2p-1)l = 1-p \Leftrightarrow (2-2p)l = 1-p \Leftrightarrow 2l = 1 \Leftrightarrow l = \frac{1}{2}.$$

On pose la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = p_n - \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{1}{2} = p_n(2p-1) + 1 - p - \frac{1}{2} \\ &= p_n(2p-1) + \frac{1}{2} - p = p_n(2p-1) + \frac{1-2p}{2} \\ &= (2p-1)\left(p_n - \frac{1}{2}\right) = (2p-1)u_n. \end{aligned}$$

On en déduit donc que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $2p-1$ et de premier terme $u_0 = p_0 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{(2p-1)^n}{2}$ et donc

$$p_n = \frac{(2p-1)^n + 1}{2}.$$

▷ **Exercice 14 :**

1. Rappeler le théorème de transfert.
2. Dans chaque cas, justifier que Y possède une espérance et calculer $E(Y)$.
   (a) $Y = n - X$ où $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$,
   (b) $Y = 2^X$ où $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$,
   (c) $Y = \frac{1}{X+1}$ où $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

1. Donnons les deux versions du théorème de transfert distinguant les cas où l'univers associée est fini ou infini :
   Théorème : [Théorème de transfert 1] Soit X une variable aléatoire discrète d'univers associée fini $X(\Omega)$ et soit g une application sur $X(\Omega)$. La variable aléatoire $g(X)$ admet une espérance et l'on a

$$\mathbb{E}(g(x)) = \sum_{x_i\in X(\omega)} g(x_i)\mathbb{P}(X = x_i).$$

   Théorème : [Théorème de transfert 2] Soit X une variable aléatoire discrète d'univers associée infini $X(\Omega)$ et soit g une application sur $X(\Omega)$. La variable aléatoire $g(X)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{x_i\in X(\omega)} g(x_i)\mathbb{P}(X = x_i)$ converge absolument et dans ce cas on a

$$\mathbb{E}(g(x)) = \sum_{x_i\in X(\omega)} g(x_i)\mathbb{P}(X = x_i).$$

2. (a) On est dans le cas d'un univers fini donc l'existence de l'espérance est automatique et l'on a par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(Y) = n - \mathbb{E}(X) = n - np = n(1-p).$$

(b) On est dans le cas d'un univers fini donc l'existence de l'espérance est automatique et l'on a par la formule du transfert :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2p)^k (1-p)^{n-k} \\ &= (2p+1-p)^n = (1+p)^n\end{aligned}$$

par la formule du binôme de Newton.

(c) On est dans le cas d'un univers infini donc par la formule du transfert, Y admet une espérance si la série numérique

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{k+1} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

est absolument convergente et comme il s'agit d'une série à termes positifs, si la série est convergente.
On a $\frac{1}{k+1} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}$ qui correspond au terme général d'une série exponentielle (à un changement d'indice linéaire près), il s'agit donc d'une série convergente donc Y admet une espérance. On a de plus :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} - \frac{\lambda^0}{0!} \right) = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} (e^{\lambda} - 1) \\ &= \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}.\end{aligned}$$

5 Algèbre linéaire

▷ **Exercice 15 :**

1. Rappeler la définition d'une famille libre de $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que la famille $((3,1,3),(2,2,1),(4,3,2))$ est libre.
3. La famille ci-dessus est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

1. Soit $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_p}\}$ une famille de vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$. On dit que $\mathcal{B}$ est une famille libre de vecteurs si aucun vecteur de $\mathcal{B}$ n'est une combinaison linéaire des autres.
2. Soit $(\lambda, \mu, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Montrons que $\lambda=\mu=\gamma=0$. On a

$$\lambda\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}3\lambda+2\mu+4\gamma\\\lambda+2\mu+3\gamma\\3\lambda+\mu+2\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3\lambda+2\mu+4\gamma=0\\\lambda+2\mu+3\gamma=0\\3\lambda+\mu+2\gamma=0\end{cases}$$

$$\overset{L_3\leftarrow L_3-L_1}{\Leftrightarrow}\begin{cases}\lambda+2\mu+4\gamma=0\\\lambda+2\mu+3\gamma=0\\-\quad\mu-2\gamma=0\end{cases}$$

$$\overset{L_1\leftrightarrow L_2}{\Leftrightarrow}\begin{cases}\lambda+2\mu+3\gamma=0\\3\lambda+2\mu+4\gamma=0\\-\quad\mu-2\gamma=0\end{cases}$$

$$\overset{L_2\leftarrow L_2-3L_1}{\Leftrightarrow}\begin{cases}\lambda+2\mu+3\gamma=0\\-4\mu-5\gamma=0\\-\quad\mu-2\gamma=0\end{cases}$$

$$\overset{L_2\leftarrow L_2-4L_3}{\Leftrightarrow}\begin{cases}\lambda+2\mu+3\gamma=0\\3\gamma=0\\-\quad\mu-2\gamma=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=0\\\gamma=0\\\mu=0\end{cases}$$

On en déduit donc que la famille $\left\{\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}\right\}$ est libre.

3. Cette famille est également une base car il s'agit d'une famille libre de cardinal 3 dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ qui est également de dimension 3.

▷ **Exercice 16 :**

1. Rappeler la définition d'une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que l'ensemble $\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid 2x+y-t=0 \quad \text{et} \quad y=t\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et trouver une famille génératrice.

1. Soit $\mathcal{B}=\{\overrightarrow{e_1},...,\overrightarrow{e_p}\}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On dit que $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de vecteurs si tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$.
2. On note $F:=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid 2x+y-t=0 \quad \text{et} \quad y=t\}$ et montrons qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
   — Trivialement on a $F\subset\mathbb{R}^4$ car F est composé de vecteurs de $\mathbb{R}^4$.
   — $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\in F$ car $2.0+0-0=0$ et $0=0$.

— Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$ deux éléments de F et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x + x' \\ \lambda y + y' \\ \lambda z + z' \\ \lambda t + t' \end{pmatrix} \in F$.

Par hypothèse sur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$ on a $2x + y - t = 0$, $2x' + y' - t' = 0$, $y = t$ et $y' = t'$. On en déduit que

$$\begin{aligned} 2(\lambda x + x') + (\lambda y + y') - (\lambda t + t') &= 2\lambda x + 2x' + \lambda y + y' - \lambda t - t' \\ &= \lambda(2x + y - t) + (2x' + y' - t') = \lambda 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

et $\lambda y + y' = \lambda t + t'$ donc on a bien que $\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} \in F$

F est donc bien un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Déterminons une famille génératrice de F. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$. On a

$$\begin{aligned} X \in F &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y \quad - t = 0 \\ \quad\quad y \quad\quad = t \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x \quad\quad = 0 \\ \quad\quad y = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases} \\ &\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow X = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ Ef &\Leftrightarrow X \in Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

On a donc que $F = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ donc $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ est une famille génératrice de F. (C'est en réalité même une base car les deux vecteurs de cette famille sont libres car non colinéaires.)

▷ **Exercice 17 :** Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (2x - y, y + z, 0).$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer une base de son noyau et une base de son image.
3. Est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
4. Déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrons que f est linéaire. Soit $((x,y,z),(x',y',z')) \in (\mathbb{R}^3)^2$ et soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ et montrons que $f(\lambda(x,y,z)+\mu(x',y',z')) = \lambda f((x,y,z))+\mu f((x',y',z'))$.
   On a
   $$\begin{aligned} f(\lambda(x,y,z)+\mu(x',y',z')) &= f((\lambda x+\mu x', \lambda y+\mu y', \lambda z+\mu z')) \\ &= (2(\lambda x+\mu x')-(\lambda y+\mu y'), (\lambda y+\mu y')+(\lambda z+\mu z'), 0) \\ &= (2\lambda x+2\mu x'-\lambda y-\mu y', \lambda y+\mu y'+\lambda z+\mu z', 0) \\ &= (\lambda(2x-y)+\mu(2x'-y'), \lambda(y+z)+\mu(y'+z'), \lambda.0+\mu 0) \\ &= \lambda(2x-y, y+z, 0)+\mu(2x'-y', y'+z', 0) \\ &= \lambda f((x,y,z))+\mu f((x',y',z')) \end{aligned}$$
   donc f est bien une application linéaire.
2. Soit $X=(x,y,z)$. On a
   $$\begin{aligned} X \in \ker(f) \Leftrightarrow f((x,y,z)) = (0,0,0) &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y &= 0 \\ \quad y+z &= 0 \\ &0=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x &= \frac{1}{2}y \\ z &= -y \end{cases} \Leftrightarrow X = \left(\frac{1}{2}y, y, -y\right) \\ &\Leftrightarrow X = y\left(\frac{1}{2}, 1, -1\right) \\ &\Leftrightarrow X \in Vect\left(\left(\frac{1}{2}, 1, -1\right)\right) \end{aligned}$$
   On a alors
   $$\ker(f) = Vect\left(\left(\frac{1}{2}, 1, -1\right)\right) = Vect(1,2,-2).$$
   $\{(1,2,-2)\}$ est donc une base de $\ker(f)$.

   On pose $\{e_1,e_2,e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et l'on a $f(e_1)=(2,0,0)$, $f(e_2) = (-1,1,0)$ et $f(e_3)=(0,1,0)$. On a $Im(f) = Vect(f(e_1),f(e_2),f(e_3))$ or on remarque $f(e_2) = \frac{-1}{2}f(e_1)+f(e_3)$ donc
   $$Im(f) = Vect(f(e_1),f(e_2)) = Vect((2,0,0),(0,1,0)) = Vect((1,0,0),(0,1,0)).$$
   Comme $(1,0,0)$ et $(0,1,0)$ sont non colinéaires ils forment une famille libre. Ils forment clairement une famille génératrice de $Im(f)$ donc ils forment une base de $Im(f)$.
3. Ici, f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donc en particulier l'espace de départ et d'arrivée ont la même dimension donc l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité sont équivalentes. Pour être injectif, il faudra que la dimension du noyau soit nulle or elle est ici de 1 donc f n'est pas injective, ni surjective et non plus bijective.

4. Les calculs de $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$ ont déjà été fait précédemment. La matrice de f dans la base canonique est donc

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

▷ **Exercice 18 :** Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} x+y+2z &= 3 \\ x+2y+z &= 1 \\ 2x+y+z &= 0 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} x+y+z-3t &= 1 \\ 2x+y-z+t &= -1 \end{cases}$ 3; $\begin{cases} x+2y-3z &= 4 \\ x+3y-z &= 11 \\ 2x+5y-5z &= 13 \\ x+4y+z &= 18 \end{cases}$.

On notera chaque système (S).

1.

$$(S) \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y+2z=3 \\ y-\ z=-2 \\ 2x+y+\ z=0 \end{cases} \overset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y+2z=3 \\ y-\ z=-2 \\ -y-3z=-6 \end{cases}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y+2z=3 \\ y-\ z=-2 \\ -4z=-8 \end{cases} \overset{L_3 \leftarrow \frac{-1}{4} L_3}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y \quad +4=3 \\ y \quad -2=-2 \\ z \quad =2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=\ 0 \\ z=\ 2 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système est donc

$$S_{(S)} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

2.

$$(S) \overset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y+\ z-3t=1 \\ -y-3z+7t=-3 \end{cases} \overset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x \quad -2z+4t=-2 \\ -y-3z+7t=-3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-2+2z-4t \\ y=\ 3-3z+7t \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système est donc

$$S_{(S)} = \left\{ \begin{pmatrix} -2+2z-4t \\ 3-3z+7t \\ z \\ t \end{pmatrix} |(z,t) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

3.

$$(S) \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+2y-3z=4 \\ y+2z=7 \\ 2x+5y-5z=13 \\ x+4y+\ \ z=18 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+2y-3z=4 \\ y+2z=7 \\ y+\ \ z=5 \\ x+4y+\ \ z=18 \end{cases}$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 - L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+2y-3z=4 \\ y+2z=7 \\ y+\ \ z=5 \\ 2y+4z=14 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+2y-3z=4 \\ y+2z=7 \\ -\ \ z=-2 \\ 2y+4z=14 \end{cases}$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+2y-3z=4 \\ y+2z=7 \\ -\ \ z=-2 \\ 0=0 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow -L_3}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+2y-6=4 \\ y+4=7 \\ z=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+6-6=4 \\ y=3 \\ z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=3 \\ z=2 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système est donc

$$S_{(S)} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

6 Python

▷ **Exercice 19 :**

1. (a) Écrire une fonction Python qui prend en argument un nombre réel x et qui renvoie $2x^3 - 3x + 7$.

   (b) En important la bibliothèque `matplotlib.pyplot`, écrire les commandes permettant d'afficher le graphe de la fonction $x \mapsto 2x^3 - 3x + 7$ sur l'intervalle $[-1, 1]$

2. Écrire une fonction Python qui prend en argument un nombre réel x et qui renvoie x **si** $x \geq 0$ et $-x$ **sinon**.

3. Comment appelle-t-on cette fonction en mathématiques ?

1. (a)

```
def fonction(x) :
        return 2*x**3-3*x+7
```

   (b)

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
X = np.linspace(-1,1,10000)
Y = [fonction(x) for x in X]
plt.plot(X,Y)
plt.grid()
plt.show()
```

2.
```
def VA(x) :
    if x >= 0 :
        return x
    else :
        return -x
```
3. Il s'agit de la fonction valeur absolue.

▷ **Exercice 20 :** À l'aide d'une boucle `for`, écrire une fonction qui prend en argument un entier naturel n et renvoie la valeur de la somme $\sum_{k=0}^{n}(2^k - k^2)$.

```
def somme(n) :
    S = 0
    for k in range(n+1) :
        S = S + 2**k - k**2
    return S
```

▷ **Exercice 21 :**

1. En important la bibliothèque `numpy` donner des commandes permettant de construire les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Écrire une commande permettant de remplacer le coefficient $(1, 3)$ de A par 7.
3. Écrire une commande permettant d'afficher la première ligne de B (sans la recopier à la main...).

1.
```
import numpy as np
A = np.array([[1,1,0],[1,2,3],[0,1,0]])
B = np.zeros((3,3))
```
2. La commande "A[0,2] = 7" répond à la question.
3. La commande"B[0]" répond à la question.

▷ **Exercice 22 :** Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x > 0 \quad f(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}.$$

1. (a) Justifier que f est dérivable et que :

$$\forall x > 0 \quad f'(x) = \frac{(x-1)}{2x} f(x).$$

   (b) En déduire le tableau de variations de f.
   (c) En déduire que pour tout entier $n \geq 2$, l'équation $f(x) = n$ possède deux solutions u_n et v_n telles que :

$$0 < u_n < 1 < v_n.$$

2. Soit $n \geq 2$ et `eps`>0. Recopier et compléter le programme suivant pour qu'il renvoie une valeur approchée de u_n à `eps` près à l'aide de la méthode de dichotomie.

```python
import numpy as np

def approx_u(n,eps):
    a = 0
    b = 1
    while _________ :
        c = (a+b)/2
        if np.exp(c/2)/np.sqrt(c) < n :
            _________
        else :
            _________
    return (a+b)/2
```

1. (a) $x \mapsto e^{\frac{x}{2}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant qu'exponentielle d'un polynôme. $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et ne s'annule jamais sur cette ensemble donc par quotient f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\sqrt{x} - e^{\frac{x}{2}}\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^2} = \frac{e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{x} \\
&= e^{\frac{x}{2}}\frac{\frac{x-1}{2\sqrt{x}}}{x} = e^{\frac{x}{2}}\frac{x-1}{2x\sqrt{x}} \\
&= \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}\frac{x-1}{2x} = \frac{x-1}{2x}f(x)
\end{aligned}
$$

(b) f est clairement une fonction strictement positive en tant que quotient d'une exponentielle et d'une racine carré strictement positive.
On a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$, $f(1) = \sqrt{e}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ par croissance comparée. On en déduit donc le tableau de variation suivant :

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$2x$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$		$+$	
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$. On a $n > \sqrt{e}$ (car $n^2 \geq 4 > e$) donc $n \in]f(1), \lim\limits_{x\to 0} f(x)[$.
Comme f est continue et strictement décroissante sur $]0,1[$ par le théo-

rème des valeurs intermédiaire il existe un unique réel $u_n \in]0,1[$ tel que $f(u_n) = n$.
De même, $n \in]f(1), \lim_{x \to +\infty} f(x)[$. Comme f est continue et strictement croissante sur $]1, +\infty[$ par le théorème des valeurs intermédiaire il existe un unique réel $v_n \in]1, +\infty[$ tel que $f(v_n) = n$.
Il existe donc uniquement deux solutions à l'équation $f(x) = n$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui sont u_n et v_n. Ces deux réels vérifient également

$$0 < u_n < 1 < v_n.$$

2.

```
import numpy as np
def approx_u(n,eps) :
    a = 0
    b = 1
    while b-a >= eps :
        c = (a+b)/2
        if np.exp(c/2)/np.sqrt(c) < n :
            b = c
        else :
            a = c
    return (a+b)/2
```