TD 01 - Suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

▷ **Exercice 1 :** Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 2^n$.
Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = \frac{u_n}{2^n}$.

1. Montrer que $(v_n)_n$ est arithmétique.
2. Exprimer u_n en fonction de n.

▷ **Exercice 2 :** Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n - n - 1$.
Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = u_n - n - 2$.

1. Montrer que $(v_n)_n$ est géométrique.
2. Exprimer u_n en fonction de n.

▷ **Exercice 3 :** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 5$.

1. Exprimer u_n en fonction de n.
2. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

▷ **Exercice 4 :** Un jeu de hasard sur ordinateur est paramétré de la façon suivante :

— Si le joueur gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est $\frac{1}{4}$;
— Si le joueur perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est $\frac{1}{2}$;
— La probabilité de gagner la premier partie est $\frac{1}{4}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note G_n l'évènement "La n-ème partie est gagnée" et on note p_n la probabilité de cet évènement.

1. Donner p_1. Calculer p_2.
2. Déterminer une relation de récurrence vérifier par la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Donner un code python permettant prenant en argument un entier naturel non nul et renvoyant p_n.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer p_n en fonction de n.
5. La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Interpréter ce résultat.

▷ **Exercice 5 :** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 5$, $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} + 4u_n$.

1. Déterminer une expression explicite de u_n.
2. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

▷ **Exercice 6 :** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$.

1. Déterminer une expression explicite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Étudier la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - u_n$. En déduire de nouveau l'expression explicite de u_n trouvé à la question précédente.
3. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\prod_{k=0}^{n} 2^{u_k}$.

▷ **Exercice 7 :** Soit $\begin{array}{cccc} f & : & I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & 4 - \frac{1}{4}\ln(x) \end{array}$ et on considère la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étudier la classe de f sur le grand intervalle possible.
2. Étudier la convexité de f.
3. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $[3, 4]$ noté l.
4. Montrer que $[3, 4]$ est un intervalle stable par f. (On donne $\ln(3) \simeq 1,10$ et $\ln(4) \simeq 1,39$.)
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [3, 4]$ puis que $|u_n - l| \leq \frac{1}{12^n}$. Conclure quand à la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

▷ **Exercice 8 :** Soit $\begin{array}{cccc} f & : & I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \frac{e^x}{x+2} \end{array}$ et on considère la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étudier la classe de f sur le grand intervalle possible.
2. Étudier la convexité de f.
3. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $[0, 1]$ noté l.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$ puis que $|u_n - l| \leq \frac{2^n}{3^n}$. Conclure quand à la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Écrire une fonction python prenant un argument un entier naturel n et renvoyant u_n.
6. Écrire le code python permettant de tracer f sur $[0, 1]$, la droite d'équation $y = x$ ainsi que les points $(u_k, f(u_k))$ pour tout $k \in [\![0, 10]\!]$.

▷ **Exercice 9 :** (EDHEC) Soit a un nombre réel strictement positif. On considère la fonction f définie, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = x - \ln(x)$.
On considère également la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$ et par la relation de récurrence, valable pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étudier f et résumer cette étude par un tableau de variation.
2. Étudier le signe de $f(x) - x$, pour tout réel x strictement positif.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à termes positifs.
4. Pour quelle valeur de a la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante ?
5. On suppose, dans cette question que $a > 1$.
   (a) Montrer que, pour tout entier naturel n : $u_n > 1$.
   (b) Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.
6. On suppose, dans cette question que $0 < a < 1$.
   (a) Montrer que $u_1 > 1$.
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.