## *TD 02 - Intégrales : Révisions et compléments*

▷ **Exercice 1 :** Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_{-2}^{2} 1+t+t^2+t^3\,dt$
2. $\int_{1}^{2} t^2+1+t\sqrt{t}\,dt$
3. $\int_{-2}^{3}(2t+1)(t^2+t)\,dt$
4. $\int_{e}^{e^2} \frac{dt}{t\ln(t)}$
5. $\int_{0}^{1} 2te^{t^2}\,dt$
6. $\int_{0}^{10} \frac{t^3}{\sqrt{t^4+1}}dt$
7. $\int_{0}^{2} \frac{x}{2x+1}\,dx$
8. $\int_{0}^{2}(3t-1)e^t\,dt$
9. $\int_{1}^{4} t^2\ln(t)\,dt$.

▷ **Exercice 2 :** On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_n=\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}dx$.

1. Calculer $I_0$ et $I_1$.
2. Déterminer la monotonie de la suite $(I_n)_n$.
3. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_n\leq 1$ et en déduire la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ :$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx=\frac{\ln(2)}{n}-\frac{1}{n}\int_0^1\ln(1+x^n)dx$. (On pourra remarquer que $x^n=xx^{n-1}$.)
5. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1\ln(1+x^n)\,dx=0$.
6. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} n(1-I_n)=\ln(2)$ puis en déduire la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$. (On pourra remarquer que $1=\int_0^1 dx$.)

▷ **Exercice 3 :** Étudier la nature des intégrales suivantes et le cas échéant, calculer leur valeur :

1. $\int_2^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t-1}}dt$,
2. $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$,
3. $\int_{-\infty}^{0}\frac{t}{(1+t^2)^2}dt$,
4. $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+e^t}dt$,
5. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2(1+|x|)^2}dx$
6. $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$

▷ **Exercice 4 :**

1. Déterminer deux réels $a$ et $b$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}\backslash\{-1,-2\}$, $\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x+2}$
2. Étudier l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty}\frac{du}{u^2+3u+2}$.

▷ **Exercice 5 :**

1. Soit $A\in\mathbb{R}_+$. Montrer que $\int_0^A\frac{e^t}{(1+e^t)^3}dt=\int_1^B\frac{dx}{(1+x)^3}$ où $B$ est une constante à déterminer.
2. En déduire la convergence puis la valeur de $\int_0^{\infty}\frac{e^t}{(1+e^t)^3}dt$.

▷ **Exercice 6 :**

1. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx$ est convergente et déterminer sa valeur.

On définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction $h$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, h(x) = \frac{\ln(x)}{x^2+1}$.

2. Étudier le signe de $h$.
3. (a) Justifier que $H : A \mapsto \int_1^A h(x)dx$ est croissante sur $[1, +\infty[$.
   (b) Montrer que $H$ est majorée par $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx$ sur $[1, +\infty[$.
   (c) Montrer que $\int_1^{+\infty} h(x)dx$ est convergente.

▷ **Exercice 7 :** Soit $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Déterminer $a, b$ et $c$ tels que $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$.
2. Soit $\epsilon \in ]0, 1[$. Calculer $\int_\epsilon^1 \frac{dx}{x(x^2+1)}$.
3. A l'aide d'une intégration par partie, montrer que

$$\int_\epsilon^1 \frac{x\ln(x)}{(x^2+1)^2} dx = \left[ -\frac{\ln(x)}{2(x^2+1)} \right]_\epsilon^1 + \frac{1}{2} \int_\epsilon^1 \frac{dx}{x(x^2+1)}.$$

4. En déduire que $\lim\limits_{\epsilon \to 0} \int_\epsilon^1 \frac{x\ln(x)}{(x^2+1)^2} dx = \frac{-\ln(2)}{4}$.

▷ **Exercice 8 :**

1. Montrer que si $f$ est une fonction continue paire et que $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut $2\int_0^{+\infty} f(x)dx$.
2. Montrer que si $f$ est une fonction continue impaire et que $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut $0$.