TD 03 - Espaces vectoriels

▷ **Exercice 1 :** Déterminer si il existe une combinaison linéaire reliant chaque famille de vecteurs :

1. Dans $\mathbb{R}^3$, $\left\{(1,0,-1),(4,2,1),\left(-8,-3,\frac{1}{2}\right)\right\}$;
2. Dans $\mathbb{R}_2[x]$, $\{(x+2)^2,(x+1)^2,x-1\}$;
3. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}\right\}$

▷ **Exercice 2 :** Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Montrer que $F\cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

▷ **Exercice 3 :**

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer de deux manières que $S_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $(k,n)\in\mathbb{N}^2$ tel que $k\leq n$. Montrer de deux manières que $\mathbb{R}_k[x]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[x]$.

▷ **Exercice 4 :** Dans $\mathbb{R}^3$, on définit les vecteurs $u=(2,1,-3)$, $v=(3,2,-1)$, $s=(1,0,-5)$ et $t=(1,1,2)$. Montrer que $\mathrm{Vect}(u,v)=\mathrm{Vect}(s,t)$.

▷ **Exercice 5 :** Montrer que l'ensemble des solutions $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$ du système homogène

$$\left\{\begin{array}{ll}2x+y+2z-t&=0\\x+y+z&=0\end{array}\right.$$

est $\mathrm{Vect}((2,-1,-1,1),(0,1,-1,-1))$.

▷ **Exercice 6 :** Dans chaque cas, exprimer F à l'aide d'équations.

1. Dans $\mathbb{R}^3$, $F=\mathrm{Vect}((1,1,1),(-1,2,1))$.
2. Dans $\mathbb{R}^3$, $F=\mathrm{Vect}((2,1,-3),(1,1,-2),(1,0,0))$.

▷ **Exercice 7 :** Déterminer le rang des familles de vecteurs suivants :

1. $\{x^3,x^2,x,1\}$ dans $\mathbb{R}_4[x]$;
2. $\{x+1,x+2,x+3\}$ dans $\mathbb{R}_1[x]$;
3. $\{(-1,2),(2,-4)\}$ dans $\mathbb{R}^2$;
4. $\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}\right\}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$;

▷ **Exercice 8 :** Dans chacun des cas suivants, montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et donner une famille génératrice de F.

1. $E=\mathbb{R}^3$ et $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2y-z=0 \quad\text{et}\quad x+y+z=0\}$.
2. $E=\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $F=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in E \mid a=2c\right\}$.

3. $E = \mathbb{R}_3[x]$ et $F = \{(a+c)x + (2ax+b)x^2 - cx^2 \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$.
4. $E = \mathbb{R}_2[x]$ et $F = \{P \in E \mid P(1) = P(2)\}$.

$\triangleright$ **Exercice 9 :** Dans $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
La famille (A, B, C) est-elle libre ?

$\triangleright$ **Exercice 10 :** Dans chacun des cas suivants, dire si la famille $\mathcal{F}$ est libre ou liée et génératrice ou non.

1. Dans $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{F} = \{(1,-1,2), (2,1,-1), (-1,-5,8)\}$.
2. Dans $\mathbb{R}_2[x]$, $\mathcal{F} = \{x^2+2x, x^2+x+1, x+2\}$.
3. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$\triangleright$ **Exercice 11 :** Déterminer une base des espaces suivants :

1. $F = \big\{(x+y, y+z) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\big\}$,
2. $F = \big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y - t = 0 \quad \text{et} \quad y = t\big\}$,
3. $F = \{P \in \mathbb{R}_3[x] \mid P(0) = P'(1)\}$,
4. $F = \big\{(a+c)x + (2ax+b)x^2 - cx^2 \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\big\}$,
5. $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & a+b & 0 \\ 2a+b & -b & 3a+2b \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$,
6. $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a+b = c+d \right\}$.

$\triangleright$ **Exercice 12 :** Dans chaque cas, montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E et donner les coordonnées de u dans cette base.

1. $E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \{(0,1,0), (0,0,1), (1,0,0)\}$ et $u = (3,2,1)$.
2. $E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \{(3,1,3), (2,2,1), (4,3,2)\}$ et $u = (3,2,1)$.
3. $E = \mathbb{R}_2[x]$, $\mathcal{B} = \{1, x-1, (x-1)^2\}$ et $u = x^2 + x + 1$.
4. $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ et $u = I_2$.

$\triangleright$ **Exercice 13 :** [Ecricome 2002] Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on considère le sous-ensemble E des matrices $M(a,b)$ définies par :

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} b & a & b \\ a & b & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$E = \big\{M(a,b) \mid a, b \in \mathbb{R}\big\}.$$

1. On note $A = M(1,0)$.

(a) Calculer A^2.

(b) En déduire que A est une matrice inversible et donner A^{-1} en fonction de A.

2. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
3. Donner une base de E.

▷ **Exercice 14 :** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $F = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel de dimension finie.
2. Trouver une base de F et en déduire sa dimension.
3. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n \in F$.

   (b) Déterminer les coordonnées de A^n dans la base trouvée précédemment.

▷ **Exercice 15 :** Soit $n \geq 2$ et $H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}$.

1. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
2. On note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et on suppose que $\dim H = n-1$. Montrer que

$$(e_1 - e_2, e_1 - e_3, \ldots, e_1 - e_n)$$

   est une base de H.