DS 01 - Suites récurrentes et intégrales impropres

▷ **Exercice 1 :**

1. Énoncer le théorème de convergence des intégrales d'exponentielles.
2. Démontrer ce théorème en admettant le cas $\alpha = 0$.

Voir le cours !

▷ **Exercice 2 :** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

où $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{-1}{2}\right\} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x + \dfrac{1+x}{1+2x} \end{array}$.

1. Étudier f afin d'établir son tableau de variation complet sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.
2. Montrer que $[0, +\infty[$ est stable par f.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et u_n est positif.
4. On pose $g : x \mapsto f(x) - x$. Étudier g afin d'établir son tableau de variation complet sur $\mathbb{R}_+$.
5. En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
6. En déduire la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. On observe que f est la somme d'un polynôme et d'une fraction de polynômes dont le dénominateur ne s'annule qu'en $\frac{-1}{2}$ donc f est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$. On a de plus pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{1(1+2x) - (1+x)2}{(1+2x)^2} = \frac{(1+2x)^2}{(1+2x)^2} + \frac{1+2x-2-2x}{(1+2x)^2} \\ &= \frac{1+4x+4x^2-1}{(1+2x)^2} = \frac{4x(x+1)}{(1+2x)^2} \end{aligned}$$

On a $f(0) = 0 + \frac{1+0}{1+0} = 1$ et on remarque de plus que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\frac{1+x}{1+2x} = \frac{x\,\frac{1}{x}+1}{x\,\frac{1}{x}+2} = \frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}+2}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+x}{1+2x} = \frac{1}{2}$. On en déduit donc les limites suivantes :

— $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty$;

— $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

On a alors le tableau de variation suivant :

x	$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
$x+1$		$+$		$+$	
$\frac{4}{(1+2x)^2}$	$\|\|$	$+$		$+$	
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2. Soit $x \in [0, +\infty[$, on a alors que $f(x) \geq f(0)$ par croissance de f sur $[0, +\infty[$ et comme $f(0) = 1$, on a $f(x) \geq 1$ soit $f(x) \in [1, +\infty[$ et donc à fortiori $f(x) \in [0, +\infty[$. L'intervalle $[0, +\infty[$ est donc bien stable par f.
3. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 0$:
   — Initialisation : On a par définition de la suite que u_0 existe et comme $u_0 = 0$ on a trivialement $u_0 \geq 0$.
   — Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque et supposons la propriété vraie au rang n et montrons là au rang $n+1$, c'est-à-dire supposons que u_n existe et que $u_n \geq 0$ et montrons que u_{n+1} existe et que $u_{n+1} \geq 0$.
   Comme $u_n \in [0, +\infty[$ et que $[0, +\infty[$ est stable par f, on a que $f(u_n)$ existe bien et que $f(u_n) \in [0, +\infty[$ soit u_{n+1} existe et $u_{n+1} \geq 0$ ce qui prouve notre hérédité.
   — Conclusion : Notre propriété est bien initialisée et est héréditaire à partir du rang 0 donc par le principe de récurrence on a prouvé que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe bien et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.
4. g est la différence de f et d'un polynôme qui sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ donc g l'est également. On a de plus pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$g'(x) = \frac{1(1+2x) - (1+x)2}{(1+2x)^2} = \frac{1+2x-2-2x}{(1+2x)^2} = \frac{-1}{(1+2x)^2} < 0.$$

On en déduit donc le tableau de variation suivant :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
g	1	$\searrow$	$\frac{1}{2}$

par le calcul de limite déjà réalisé dans la première question.

5. On observe que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, +\infty[$ et par le tableau de variation précédent, on a que $g(u_n) > 0$ soit $u_{n+1} - u_n > 0$ ou encore que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
6. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente alors elle convergerai vers un point fixe de f, c'est-à-dire à un zéro de g sur $[0, +\infty[$ (car la suite est à termes positifs) or il n'existe pas de tel point. On en déduit donc que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente et la strict croissance de la suite nous donne donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

▷ **Exercice 3 :**

1. Déterminer la nature et la valeur de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^{13}}\right) dt$.
2. (a) Déterminer deux réels a et b tel que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-3, 1\}$,

$$\frac{-2}{(x-1)(x+3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3}.$$

   (b) En déduire la nature de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{-2}{(x-1)(x+3)} dx$ et calculer sa valeur en cas de convergence.

1. On sait que les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^4}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{13}}$ sont convergentes en tant qu'intégrales de Riemann de coefficients respectifs 4 et 13 qui sont tout deux strictement supérieur à 1. On a alors par linéarité que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^{13}}\right) dt$ est convergente et

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^{13}}\right) dt = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^4} - \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{13}} = \frac{1}{4-1} - \frac{1}{13-1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{4-1}{12} = \frac{1}{4}.$$

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{-3, 1\}$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a alors

$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} = \frac{ax+3a}{(x-1)(x+3)} + \frac{bx-b}{(x-1)(x+3)} = \frac{(a+b)x+3a-b}{(x-1)(x+3)}$$

   Pour avoir l'égalité pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-3, 1\}$ $\dfrac{-2}{(x-1)(x+3)} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+3}$ on doit avoir que (a, b) est solution du système $\begin{cases} a+b=0 \\ 3a-b=-2 \end{cases}$ par unicité des coefficients d'un polynôme. On a

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 3a-b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-b \\ 4a=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{1}{2} \\ a=\dfrac{-1}{2} \end{cases}.$$

   On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-3, 1\}$,

$$\frac{-2}{(x-1)(x+3)} = \frac{-1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+3)}.$$

(b) La fonction $x \mapsto \dfrac{-2}{(x-1)(x+3)}$ est continue sur $[2,+\infty[$ en tant que fraction de polynômes dont le dénominateur ne s'annule jamais (il s'annule uniquement en -3 et en 1 qui ne sont pas dans $[2,+\infty[$). Soit $A \in [2,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}\int_2^A \frac{-2}{(x-1)(x+3)}dx &= \frac{1}{2}\int_2^A \left(-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+3}\right)dx\\ &= \frac{1}{2}\left[-\ln(x-1)+\ln(x+3)\right]_2^A = \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{x+3}{x-1}\right)\right]_2^A\\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{A+3}{A-1}\right)-\frac{1}{2}\ln(5)\end{aligned}$$

Comme $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\frac{A+3}{A-1} = \lim_{A\to+\infty}\frac{1+\frac{3}{A}}{1-\frac{1}{A}} = \frac{1+0}{1-0} = 1$, on en déduit par continuité de la fonction logarithme que

$$\lim_{A\to+\infty}\int_2^A \frac{-2dx}{(x-1)(x+3)} = \frac{1}{2}\ln(1)-\frac{\ln(5)}{2} = -\frac{\ln(5)}{2}.$$

L'intégrale impropre $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{-2dx}{(x-1)(x+3)}$ est donc bien convergente et l'on a

$$\int_2^{+\infty}\frac{-2dx}{(x-1)(x+3)} = -\frac{\ln(5)}{2}.$$