DS 01 - Suites récurrentes et intégrales impropres

▷ **Exercice 1 :**

1. Énoncer le théorème de convergence des intégrales d'exponentielles.
2. Démontrer ce théorème en admettant le cas $\alpha = 0$.

▷ **Exercice 2 :** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

où $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{-1}{2}\right\} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x + \dfrac{1+x}{1+2x} \end{array}$.

1. Étudier f afin d'établir son tableau de variation complet sur $\left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.
2. Montrer que $[0, +\infty[$ est stable par f.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et u_n est positif.
4. On pose $g : x \mapsto f(x) - x$. Étudier g afin d'établir son tableau de variation complet sur $\mathbb{R}_+$.
5. En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
6. En déduire la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

▷ **Exercice 3 :**

1. Déterminer la nature et la valeur de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^{13}}\right) dt$.
2. (a) Déterminer deux réels a et b tel que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-3, 1\}$,

$$\frac{-2}{(x-1)(x+3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3}.$$

   (b) En déduire la nature de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{-2}{(x-1)(x+3)} dx$ et calculer sa valeur en cas de convergence.