ANNEE SCOLAIRE 2024/2025 Devoir surveillé sur table $n°1$ Date : 20/09/2024 Heure 13h30 Durée : 4h00 Les documents et la calculatrice ne sont pas autorisés.	Lycée Jean-Jacques ROUSSEAU Sarcelles

1 Quelques exercices en vrac

1.1 Application linéaire sur $\mathbb{R}^3$

On pose $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z,t) & \mapsto & (2x+y+z, x+y+t) \end{array}$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer une base de $\ker(f)$.
3. Déterminer une base $Im(f)$.
4. Donner la matrice de f lorsque l'on munit $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^2$ de leurs bases canoniques.
5. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

1. Montrons que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^2$. Soit $((x,y,z,t),(x',y',z',t')) \in (\mathbb{R}^4)^2$ et soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ et montrons que

$$f(\lambda(x,y,z,t)+\mu(x',y',z',t')) = \lambda f((x,y,z,t)) + \mu f((x',y',z',t')).$$

On a

$$\begin{aligned} f(\lambda(x,y,z,t)+\mu(x',y',z',t')) &= f((\lambda x+\mu x', \lambda y+\mu y', \lambda z+\mu z', \lambda t+\mu t')) \\ &= (2(\lambda x+\mu x')+\lambda y+\mu y'+\lambda z+\mu z', \lambda x+\mu x'+\lambda y+\mu y'+\lambda t+\mu t') \\ &= (\lambda(2x+y+z)+\mu(2x'+y'+z'), \lambda(x+y+t)+\mu(x'+y'+t')) \\ &= \lambda(2x+y+z, x+y+t)+\mu(2x'+y'+z', x'+y'+t') \\ &= \lambda f((x,y,z,t))+\mu f((x',y',z',t')) \end{aligned}$$

f est donc bien une application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^2$.

2. Soit $X=(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. On a

$$\begin{aligned} X \in \ker(f) &\Leftrightarrow f((x,y,z,t)) = (0,0) \Leftrightarrow (2x+y+z, x+y+t) = (0,0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+z &= 0 \\ x+y+t &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2x-y \\ t = -x-y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow X = (x,y,-2x-y,-x-y) \\ &\Leftrightarrow X = x(1,0,-2,-1)+y(0,1,-1,-1) \\ &\Leftrightarrow X \in Vect((1,0,-2,-1),(0,1,-1,-1)) \end{aligned}$$

On a donc $\ker(f) = Vect((1,0,-2,-1),(0,1,-1,-1))$ et comme les deux vecteurs de $\{(1,0,-2,-1),(0,1,-1,-1)\}$ ne sont pas colinéaire, ils forment une famille libre et donc forment une base du sous-espace vectoriel qu'ils engendrent. $\{(1,0,-2,-1),(0,1,-1,-1)\}$ est donc bien une base de $\ker(f)$.

3. On note $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On a $f(e_1) = (2,1), f(e_2) = (1,1), f(e_3) = (1,0)$ et $f(e_4) = (0,1)$ donc
$$Im(f) = Vect((2,1),(1,1),(1,0),(0,1)) = \mathbb{R}^2,$$
car la famille qui engendre $Im(f)$ contient la base canonique de $\mathbb{R}^2$. La base canonique de $\mathbb{R}^2$ est donc bien une base de $Im(f)$.
4. Par les calculs de la question précédente, on a que la matrice de f dans les bases canoniques est
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
5. $\ker(f)$ est différent de $\{0_{\mathbb{R}^4}\}$ donc f n'est pas injective, elle n'est donc pas bijective.
En revanche, $Im(f) = \mathbb{R}^2$ donc f est bien surjective.

1.2 Espace vectoriel

Les deux questions sont indépendantes.

1. On considère la famille $\mathcal{B} = \{x^2+1, x^2+x-1, x^2+x\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$
   (a) Montrer que 1 peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$. Procéder de même avec les vecteurs x et x^2.
   (b) En déduire que $Vect(1, x, x^2) = Vect(x^2+1, x^2+x-1, x^2+x)$.
   (c) En déduire le rang de la famille $\mathcal{B}$.
2. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et on considère $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$.
   (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à l'aide de la définition d'un sous-espace vectoriel.
   (b) Montrer que $F = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

1. On note $P_1 = x^2+1$, $P_2 = x^2+x-1$ et $P_3 = x^2+x$
   (a) On observe que $P_3 - P_2 = x^2 + x - (x^2+x-1) = 1$.
   On a $P_2 - P_1 = x - 2$ soit
   $$x = P_2 - P_1 + 2 = P_2 - P_1 + 2(P_3 - P_2) = -P_1 - P_2 + 2P_3.$$
   Enfin, on a aussi
   $$x^2 = P_3 - x = P_3 - (-P_1 - P_2 + 2P_3) = P_1 + P_2 - P_3.$$
   (b) On a $(1, x, x^2) \in Vect(P_1, P_2, P_3)^3$ par la question précédente donc $Vect(1, x, x^2) \subset Vect(P_1, P_2, P_3)$. Réciproquement P_1, P_2 et P_3 sont clairement des combinaisons linéaires de 1, x et x^2 donc $(P_1, P_2, P_3) \in Vect(1, x, x^2)^3$ donc $Vect(P_1, P_2, P_3) \subset Vect(1, x, x^2)$. On a donc bien l'égalité recherché par double inclusion.

(c) On observe que $Vect(1, x, x^2) = \mathbb{R}_2[x]$ donc on a

$$rg(\mathcal{B}) = \dim(Vect(P_1, P_2, P_3)) = \dim(Vect(1, x, x^2)) = \dim(\mathbb{R}_2[x]) = 3.$$

2. Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   — F est constitué de matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc $F \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   — On a $A0_2 = 0_2$ et $0_2A = 0_2$ donc on a bien $A0_2 = 0_2A$ donc $0_2 \in F$. On a donc bien que $F \neq \emptyset$.
   — Soit $(M, N) \in F^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda M + N \in F$. On a par hypothèse que $AM = MA$ et $AN = NA$.
   On a

$$(\lambda M + N)A = \lambda MA + NA = \lambda AM + AN = A(\lambda M + N),$$

   soit que $\lambda M + N \in F$

   F est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a

$$\begin{aligned}
M \in F \Leftrightarrow AM = MA &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+c & 2b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b & 2a+b \\ c+2d & 2c+d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2c-2b & 2d-2a \\ 2a-2d & 2b-2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} b = c \\ a = d \end{cases} \Leftrightarrow M = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow M \in Vect\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

   On a donc $F = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

1.3 Équation différentielle

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$(E_H) \ : \ y'' - 4y' + 3y = 0.$$

2. On considère l'équation différentielle

$$(E) \ : \ y'' - 4y' + 3y = 32te^{-t}.$$

   (a) Déterminer une solution particulière de (E) sous la forme $t \mapsto (at+b)e^{-t}$.
   (b) Résoudre l'équation différentielle (E).

3. (a) On pose

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = 32te^{-t} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

   Justifier que ce système admet une unique solution.

(b) Déterminer cette unique solution.

1. On reconnait une équation différentielle linéaire homogène normalisée d'ordre 2.
L'équation caractéristique associée est $r^2 - 4r + 3 = 0$. Le trinôme $r^2 - 4r + 3$ a pour discriminant $(-4)^4 - 4.3.1 = 16 - 12 = 4 = 2^2 > 0$. Il admet donc deux racines distinctes qui sont $\alpha = \frac{4+2}{2} = 3$ et $\beta = \frac{4-2}{2} = 1$.
On en déduit que l'ensemble des solutions de (E_H) est
$$S_{(E_H)} = \{t \mapsto \lambda e^{3t} + \mu e^t \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

2. (a) Soit $y_p : t \mapsto (at + b)e^{-t}$. Il s'agit d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ en tant que produit d'un polynôme et d'une exponentielle. On a donc pour tout $t \in \mathbb{R}$:
$$y_p'(t) = ae^{-t} - (at + b)e^{-t} = (-at + a - b)e^{-t}$$
et
$$y_p''(t) = -ae^{-t} - (-at + a - b)e^{-t} = (at - 2a + b)e^{-t}.$$
On a ainsi :
$$\begin{aligned} y_p \text{ solution de } (E) &\Leftrightarrow y_p''(t) - 4y_p'(t) + 3y_p(t) = 32te^{-t} \\ &\Leftrightarrow (at - 2a + b)e^{-t} - 4(-at + a - b)e^{-t} + 3(at + b)e^{-t} = 32te^{-t} \\ &\Leftrightarrow (at - 2a + b + 4at - 4a + 4b + 3at + 3b)e^{-t} = 32te^{-t} \\ &\Leftrightarrow 8at - 6a + 8b = 32t \Leftrightarrow \begin{cases} 8a & = 32 \\ -6a + 8b = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a & = 4 \\ & 8b = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a & = 4 \\ & b = 3 \end{cases} \end{aligned}$$
On en déduit donc que $y_p : t \mapsto (4x + 3)e^{-t}$ est une solution particulière de (E).

(b) L'ensemble des solutions de l'équation différentielle normalisée linéaire d'ordre 2 est donc
$$S_{(E)} = \{t \mapsto \lambda e^{3t} + \mu e^t + (4t + 3)e^{-t} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

3. (a) On reconnait un problème de Cauchy et par le théorème de Cauchy-Lipschitz ce dernier admet une unique solution.

(b) On note y l'unique solution de ce problème. Par la première équation du système, il existe donc λ et μ tel que $y : t \mapsto \lambda e^{3t} + \mu e^t + (4x + 3)e^{-t}$. Cette fonction est dérivable et l'on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$y'(t) = 3\lambda e^{3t} + \mu e^t + 4e^{-t} - (4x + 3)e^{-t}.$$
On en déduit donc à l'aide des deux dernières équations du système que λ et μ vérifient
$$\begin{cases} \lambda + \mu + 3 = 0 \\ 3\lambda + \mu + 4 - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = -3 \\ 3\lambda + \mu = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\lambda = -3 \\ \mu = -3\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{3}{2} \\ \mu = -\frac{9}{2} \end{cases}$$

L'unique solution du problème de Cauchy est donc

$$y : t \mapsto \frac{3}{2}e^{3t} - \frac{9}{2}e^{-t} + (4x+3)e^t.$$

1.4 Intégrales

Les deux questions sont indépendantes.

1. Énoncer et démontrer le critère de convergence des intégrales de Riemann
2. Soit $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$.
   (a) Déterminer a, b et c tels que $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$.
   (b) Soit $\epsilon \in]0,1[$. Montrer que $\int_\epsilon^1 \frac{dx}{x(x^2+1)} = -\ln(\epsilon) + \frac{\ln(1+\epsilon^2)}{2} - \frac{\ln(2)}{2}$.
   (c) A l'aide d'une intégration par partie, montrer que

$$\int_\epsilon^1 \frac{x\ln(x)}{(x^2+1)^2}dx = \left[-\frac{\ln(x)}{2(x^2+1)}\right]_\epsilon^1 + \frac{1}{2}\int_\epsilon^1 \frac{dx}{x(x^2+1)}.$$

   (d) En déduire que

$$\int_\epsilon^1 \frac{x\ln(x)}{(x^2+1)^2}dx = \frac{\ln(\epsilon)}{2}\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2+1} + \frac{\ln(1+\epsilon^2)}{4} - \frac{\ln(2)}{4}$$

   (e) En déduire que $\lim\limits_{\epsilon\to 0} \int_\epsilon^1 \frac{x\ln(x)}{(x^2+1)^2}dx = \frac{-\ln(2)}{4}$.

1. Voir le cours !
2. (a) Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1} = \frac{ax^2+a+bx^2+cx}{x(x^2+1)}$.
   Pour avoir égalité entre cette dernière quantité et $\frac{1}{x(x^2+1)}$ on doit avoir l'égalité polynomiale $1 = (a+b)x^2+cx+a$, soit par unicité des coefficients d'un polynôme que a, b et c vérifient

$$\begin{cases} a+b &= 0 \\ c &= 0 \\ a &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= 1 \\ b &= -1 \\ c &= 0 \end{cases}.$$

   On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}.$$

   (b) On observe que sur $[\epsilon, 1]$ la fonction $x \mapsto \frac{1}{x(x^2+1)}$ est continue car il s'agit d'un quotient de polynômes dont le dénominateur ne s'annule qu'en 0 qui n'appartient pas à $[\epsilon, 1]$. On a ainsi :

$$\int_\epsilon^1 \frac{dx}{x(x^2+1)} = \int_\epsilon^1 \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right) dx \quad \text{par la question précédente}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_\epsilon^1 \frac{1}{x}dx - \frac{1}{2}\int_\epsilon^1 \frac{2x}{x^2+1}dx \\
&= [\ln(x)]_\epsilon^1 - \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_\epsilon^1 \\
&= \ln(1) - \ln(\epsilon) - \frac{1}{2}(\ln(1^2+1) - \ln(1+\epsilon^2)) \\
&= -\ln(\epsilon) + \frac{\ln(1+\epsilon^2)}{2} - \frac{\ln(2)}{2}
\end{aligned}
$$

(c) On pose $u : x \mapsto \ln(x)$ et $v : x \mapsto -\frac{1}{2(x^2+1)}$. Il s'agit de fonctions qui sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\epsilon, 1]$ et pour tout $x \in [\epsilon, 1]$ on a $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v'(x) = -\frac{-2x}{2(x^2+1)^2} = \frac{x}{(x^2+1)^2}$.
On peut donc utiliser la formule de l'intégration par partie et l'on a

$$
\begin{aligned}
\int_\epsilon^1 \frac{x\ln(x)}{(x^2+1)^2}dx &= \int_\epsilon^1 \ln(x)\frac{x}{(x^2+1)^2}dx \\
&= \left[-\frac{\ln(x)}{2(x^2+1)}\right]_\epsilon^1 - \int_\epsilon^1 \frac{1}{x}\frac{-1}{2(x^2+1)}dx \\
&= \left[-\frac{\ln(x)}{2(x^2+1)}\right]_\epsilon^1 + \frac{1}{2}\int_\epsilon^1 \frac{dx}{x(x^2+1)}
\end{aligned}
$$

(d) En continuant les calculs précédent, on a

$$
\begin{aligned}
\int_\epsilon^1 \frac{x\ln(x)}{(x^2+1)^2}dx &= -\frac{\ln(1)}{2(1+1)} - \frac{-\ln(\epsilon)}{2(\epsilon^2+1)} + \frac{1}{2}\left(-\ln(\epsilon) + \frac{\ln(1+\epsilon^2)}{2} - \frac{\ln(2)}{2}\right) \\
&= \frac{\ln(\epsilon)}{2}\left(\frac{1}{\epsilon^2+1} - 1\right) + \frac{\ln(1+\epsilon^2)}{4} - \frac{\ln(2)}{4} \\
&= \frac{\ln(\epsilon)}{2}\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2+1} + \frac{\ln(1+\epsilon^2)}{4} - \frac{\ln(2)}{4}
\end{aligned}
$$

(e) On a par croissance comparée que $\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon^2\ln(\epsilon) = 0$ et continuité de la fonction logarithme, on a

$$
\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^1 \frac{x\ln(x)}{(x^2+1)^2}dx &= \frac{0}{2(0+1)} + \frac{\ln(1+0)}{4} - \frac{\ln(2)}{4} \\
&= -\frac{\ln(2)}{4}.
\end{aligned}
$$

2 Problème 1 : Inspiré par Ecricome ECT 2021

On considère

$$
f \; : \; \begin{array}{ccc} [1, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\ln(x)}{x} \end{array}.
$$

2.1 Étude graphique

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. Dresser le tableau de variation complet de f sur $[1, +\infty[$.
2. (a) Étudier la convexité de f sur $[1, +\infty[$.

   (b) La courbe $\mathcal{C}_f$ admet-elle un point d'inflexion ?
3. On note M le point d'abscisse $e^{\frac{3}{2}}$ de $\mathcal{C}_f$.

   (a) Déterminer l'équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ au point M.

   (b) Quelle est la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (T) sur $[1, +\infty[$?
4. Recopier et compléter le code python permettant de tracer $\mathcal{C}_f$, T et le point M sur $[1, 6]$:

```
import ·········
import ·········
X = ·········
Y = ·········
T = ·········
·········
·········
plt.plot([···],[······],'x')
plt.grid()
······
```

1. On observe que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[1, +\infty[$ en tant quotient de la fonction logarithme qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc sur $[1, +\infty[$ et du polynôme $x \mapsto x$ qui ne s'annule qu'en 0 qui n'est pas dans $[1, +\infty[$.
   On en déduit donc que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln(x).1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

   On a $1 - \ln(x) > 0 \Leftrightarrow 1 > \ln(x) \Leftrightarrow e > x$. De plus $f(1) = \frac{\ln(1)}{1} = 0$, $f(e) = \frac{\ln(e)}{e} = \frac{1}{e}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissance comparée.
   On peut donc en déduire la tableau de variation suivant :

x	1		e		$+\infty$
$1-\ln(x)$		$+$	0	$-$	
x^2		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

2. (a) Comme f est de classe au moins $\mathcal{C}^2$, nous pouvons étudier la convexité de f à partir du signe de f''. On a pour tout $x \in [1, +\infty[$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\left(0 - \frac{1}{x}\right) x^2 - (1 - \ln(x))2x}{x^4} = \frac{-x - 2x + 2x\ln(x)}{x^4} \\ &= \frac{2x\ln(x) - 3x}{x^4} = \frac{2\ln(x) - 3}{x^3}. \end{aligned}$$

On a $2\ln(x) - 3 > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > \frac{3}{2} \Leftrightarrow x > e^{\frac{3}{2}}$. On en déduit donc le tableau de signe suivant :

x	1		$e^{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$2\ln(x) - 3$		$-$	0	$+$	
x^3		$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

La fonction f est donc concave sur $\left[1, e^{\frac{3}{2}}\right]$ et convexe sur $\left[e^{\frac{3}{2}}, +\infty\right[$.

(b) f admet donc un point d'inflexion en $e^{\frac{3}{2}}$

3. (a) L'équation de la tangente est $y = f'\left(e^{\frac{3}{2}}\right)\left(x - e^{\frac{3}{2}}\right) + f\left(e^{\frac{3}{2}}\right)$.

On a $f\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{\ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right)}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}$ et $f'\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1-\ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right)}{e^{\frac{3}{2}2}} = \frac{1-\frac{3}{2}}{e^3} = \frac{-1}{2e^3}$.
L'équation de la tangente est donc

$$y = -\frac{x - e^{\frac{3}{2}}}{2e^3} + \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}} = \frac{-x + e^{\frac{3}{2}} + 3e^{\frac{3}{2}}}{2e^3} = \frac{-x + 4e^{\frac{3}{2}}}{2e^3}.$$

(b) $e^{\frac{3}{2}}$ étant le point d'inflexion la position de la courbe par rapport à la tangente change en ce point.
En particulier, comme sur $\left[1, e^{\frac{3}{2}}\right]$ la fonction est concave la courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessous de la tangente (T) et comme sur $\left[e^{\frac{3}{2}}, +\infty\right[$ la fonction est convexe la courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessus de la tangente (T).

4.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
X = np.linspace(1,6,1000)
Y = [np.log(x)/x for x in X]
T = [(-x+4*np.exp(3/2))/(2*np.exp(3)) for x in X]
plt.plot(X,Y)
plt.plot(X,T)
plt.plot([np.exp(3/2)],[3/(2*np.exp(3/2))],'x')
plt.grid()
plt.show()
```

2.2 Étude d'intégrales impropres

5. Pour tout réel A supérieur ou égal à 1, calculer l'intégrale $I(A) = \int_1^A f(x)dx$.
6. Étudier la convergence de l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$
7. Pour tout réel A supérieur ou égale à 1, on note $J(A) = \int_1^A \frac{\ln(x)}{x^2}dx$.
   (a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que
   $$J(A) = \frac{-\ln(A)}{A} - \frac{1}{A} + 1$$
   (b) Déterminer $\lim\limits_{A\to+\infty} J(A)$.
8. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
   $$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) := \begin{cases} 0 & \text{si x <1} \\ \frac{\ln(x)}{x^2} & \text{sinon} \end{cases}$$
   (a) Écrire une fonction python permettant de calculer $g(x)$ pour un x donné.
   (b) Montrer que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$.
   (c) Étudier l'intégrale doublement impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, dx$.

5. On a vu précédemment que f est continue sur $[1, +\infty[$ donc à fortiori également sur $[1, A]$ pour tout $A \geq 1$. On a ainsi
   $$I(A) = \frac{1}{2}\int_1^A 2\frac{1}{x}\ln(x)dx = \frac{1}{2}\left[\ln(x)^2\right]_1^A = \frac{\ln(A)^2 - \ln(1)^2}{2} = \frac{\ln(A)^2}{2}.$$
6. On a $\lim\limits_{A\to+\infty} I(A) = +\infty$ donc l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ est divergente.
7. (a) La fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$ en tant que quotient de la fonction logarithme par un polynôme s'annulant uniquement en 0 qui n'est pas dans $[1, +\infty[$.
   De plus on pose $u : x \mapsto \ln(x)$ et $v : x \mapsto \frac{-1}{x}$ et on remarque qu'il s'agit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$. On a donc pour tout $A \geq 1$ par intégration par partie,
   $$\begin{aligned} J(A) = \int_1^A \frac{1}{x^2}\ln(x)dx &= \left[\frac{-\ln(x)}{x}\right]_1^A - \int_1^A \frac{-1}{x}\frac{1}{x}dx \\ &= -\frac{\ln(A)}{A} + \frac{\ln(1)}{1} + \int_1^A \frac{dx}{x^2} \\ &= -\frac{\ln(A)}{A} + \left[\frac{-1}{x}\right]_1^A \\ &= -\frac{\ln(A)}{A} - \frac{1}{A} + 1 \end{aligned}$$
   (b) Par croissance comparée, on a $\lim\limits_{A\to+\infty} \frac{\ln(A)}{A} = 0$ donc on en déduit que
   $$\lim_{A\to+\infty} J(A) = 0 - 0 + 1 = 1.$$

8. (a)
```
import numpy as np
def g(x) :
    if x<1 :
        return 0
    else :
        return np.log(x)/(x**2)
```

(b) On a déjà vu que $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2}$ est continue sur $]1, +\infty[$ donc g est continue sur $]1, +\infty[$. De même la fonction nulle est continue donc g est continue sur $]-\infty, 1[$. Il ne nous reste que la continuité en 1 a étudié.
On a $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 0 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\ln(x)}{x^2} = \frac{\ln(1)}{1} = 0$.
La fonction est donc bien continue en 1.
La fonction g est donc continue sur $\mathbb{R}$.

(c) g est continue sur $\mathbb{R}$. Pour étudier l'intégrale doublement impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx$, nous allons étudier l'intégrale impropre $\int_1^{\infty} g(x)\,dx$ et $\int_{-\infty}^{1} g(x)\,dx$.

— L'intégrale impropre $\int_1^{\infty} g(x)dx$ est convergente si $J(A)$ admet une limite finie lorsque A tend vers $+\infty$ or il a été vu que cette limite valait 1 donc l'intégrale impropre $\int_1^{\infty} g(x)dx$ est convergente.

— L'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{1} g(x)dx$ correspond à l'intégrale nulle car pour tout $x \in]-\infty, 1]$, $g(x) = 0$ donc cette dernière est convergente et vaut 0.

L'intégrale doublement impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx$ est donc convergente et l'on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = \int_{-\infty}^{1} g(x)dx + \int_{1}^{+\infty} g(x)\,dx = 0 + 1 = 1.$$

3 Problème 2 : Inspiré par Ecricome ECT 2020

3.1 Etude de fonction

On pose $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x}{1+x+x^2} \end{array}$ et on note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative.

1. Dresser en justifiant le tableau de variation complet de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la tangente de f en 0.
3. Tracer l'allure de $(\mathcal{C}_f)$ ainsi que la droite de la tangente en 0 sur $[-2, 2]$.
4. Donner le code Python permettant de tracer informatiquement le graphique précédent.
5. Justifier que $[-1, 0]$ et $[0, 1]$ sont deux intervalles stables par f.
6. Déterminer les points fixes de f. (On pourra résoudre directement l'équation.)
7. Déterminer le signe de la fonction $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - x \end{array}$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

1. Le trinôme $1+x+x^2$ a pour discriminant $1^2-4.1.1=-3$ qui est strictement négatif donc ce trinôme ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$. f est donc un quotient de polynômes qui sont de classes $\mathcal{C}^\infty$ et dont le dénominateur de s'annule jamais. Il s'agit donc d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

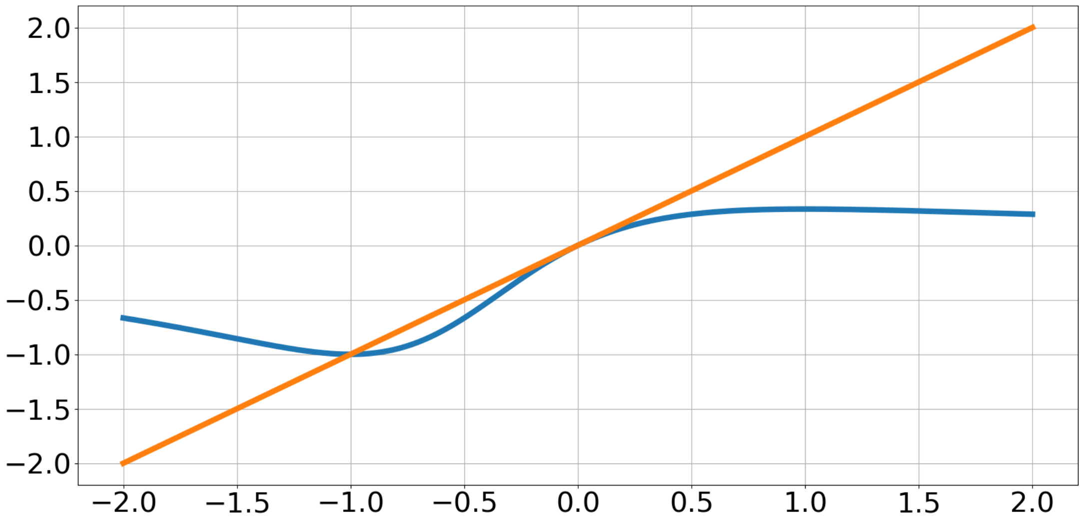
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1(1+x+x^2)-x(1+2x)}{(1+x+x^2)^2} = \frac{1+x+x^2-x-2x^2}{(1+x+x^2)^2} \\ &= \frac{1-x^2}{(1+x+x^2)^2} = \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x+x^2)^2}. \end{aligned}$$

On a $f(-1)=\frac{-1}{1-1+1}=-1$ et $f(1)=\frac{1}{3}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $f(x)=\frac{x}{x^2}\frac{1}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}=\frac{1}{x}\frac{1}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.
On en déduit donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$(1+x+x^2)^2$		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	0

2. L'équation de la tangente en 0 est $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ or $f(0)=0$ et $f'(0)=\frac{1.1}{1^2}=1$. On a donc que l'équation de la tangente en 0 est

$$y=x.$$



3.

4.
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
X = np.linspace(-2,2,1000)
Y = [x/(1+x+x**2) for x in X]
plt.plot(X,Y)
plt.plot(X,X)
plt.grid()
plt.show()
```

5. Par le tableau de variation de f, f est croissante sur $[-1,0]$ donc $f([-1,0]) = [f(-1), f(0)] = [-1,0] \subset [-1,0]$ donc l'intervalle $[-1,0]$ est bien stable par f. De même, f est croissante sur $[0,1]$ donc $f([0,1]) = [f(0), f(1)] = \left[0, \frac{1}{3}\right] \subset [0,1]$ donc l'intervalle $[0,1]$ est bien stable par f.

6. Résolvons l'équation $f(x) = x$.

$$\begin{aligned} f(x) = x \Leftrightarrow \frac{x}{1+x+x^2} = x \Leftrightarrow x = x(1+x+x^2) \\ \Leftrightarrow x(1-(1+x+x^2)) = 0 \Leftrightarrow x(-x-x^2) = 0 \\ \Leftrightarrow -x^2(x+1) = 0 \end{aligned}$$

Les points fixes de f sont donc les réels -1 et 0.

7. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g(x) = f(x) - x &= \frac{x}{1+x+x^2} - x = x\left(\frac{1}{1+x+x^2} - 1\right) \\ &= x\left(\frac{1}{1+x+x^2} - \frac{1+x+x^2}{1+x+x^2}\right) = x\frac{1-1-x-x^2}{1+x+x^2} \\ &= x\frac{-x-x^2}{1+x+x^2} = \frac{-x^2(1+x)}{1+x+x^2} \end{aligned}$$

Il a été vu que $1+x+x^2$ est un trinôme ne s'annulant jamais sur $\mathbb{R}$, il est donc du signe de son coefficient dominant qui est positif. De plus, un carré est toujours positif. On a donc que g est du signe opposé à $1+x$ soit g est positif sur $]-\infty,-1]$ et négatif sur $[-1,+\infty[$.
Cela signifie que la courbe $y=x$ est au dessous de $\mathcal{C}_f$ sur $]-\infty,-1]$ et au dessus sur $[-1,+\infty[$.

3.2 Etude de suite où le premier terme est positif

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\left\{\begin{array}{l} u_1=1 \\ \forall n\in\mathbb{N}^*, u_{n+1}=f(u_n). \end{array}\right.$

8. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe et que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n\in[0,1]$.
9. (a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $f\left(\frac{1}{n}\right)\leq\frac{1}{n+1}$.
   (b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $0\leq u_n\leq\frac{1}{n}$.
   (c) En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (d) Expliquer en quoi la limite trouvé est cohérente avec les résultats trouvés dans la partie précédente.
10. Recopier et compléter le programme python permettant de déterminer le premier entier n tel que $u_n\leq\epsilon$ pour un ϵ donnée.

```
def f(x) :
        return ·········
def rang(Eps) :
        u = ···
        n = ···
        ············
                u = ···
                n = ···
        return ···
```

8. Montrons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$ que u_n existe et que $u_n\in[0,1]$
   — Initialisation : On a $u_1=1\in[0,1]$.
   — Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}^*$ fixé quelconque et supposons la propriété vraie au rang n et montrons là au rang $n+1$, c'est-à-dire supposons que u_n existe et que $u_n\in[0,1]$ et montrons que u_{n+1} existe et que $u_{n+1}\in[0,1]$.
   Comme $u_n\in[0,1]$ et que $[0,1]$ est stable par f, on a que $f(u_n)$ existe bien et que $f(u_n)\in[0,1]$ soit u_{n+1} existe et $u_{n+1}\in[0,1]$ ce qui prouve notre hérédité.
   — Conclusion : Notre propriété est bien initialisée au rang 1 et est héréditaire à partir du rang 1 donc par le principe de récurrence on a prouvé que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ existe bien et que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n\in[0,1]$.
9. (a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{n}\right) &= \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} \\ &= \frac{1}{n+1+\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

   car $n+1+\frac{1}{n}\geq n+1$.

(b) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$.

— Initialisation : On a $u_1 = 1$ et $\frac{1}{1} = 1$ donc on a bien $0 \leq u_1 \leq 1$ ce qui vérifie notre initialisation.

— Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque et supposons la propriété vraie au rang n et montrons là au rang $n+1$, c'est-à-dire supposons que $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$ et montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$.
f est croissante sur $[-1, 1]$ par la partie précédente donc comme 0, u_n et $\frac{1}{n}$ sont des éléments de cette intervalle, on a par application de f sur notre hypothèse de récurrence $f(0) \leq f(u_n) \leq f\left(\frac{1}{n}\right)$.
On a $f(0) = 0$ et $f(u_n) = u_{n+1}$ et par la question précédente, $f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n+1}$ donc on en déduit

$$0 \leq u_{n+1} \leq f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n+1},$$

ce qui achève notre hérédité.

— Conclusion : L'inégalité est initialisée au rang 1 et est héréditaire à partir de ce rang donc par le principe de récurrence, on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$.

(c) Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} 0 = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc par le théorème des gendarmes, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et on a

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0.$$

(d) Une suite récurrente convergente du type $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers un point fixe de f donc dans notre cas la limite ne peut être que -1 ou 0 et comme la suite est à termes positifs, -1 est impossible. La limite est donc bien nulle.

10.

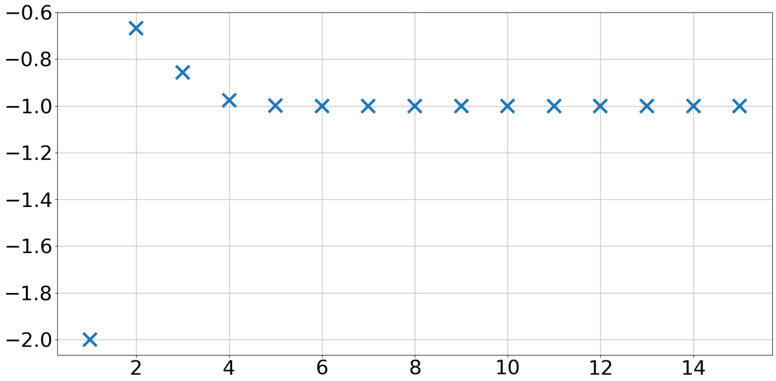
```
def f(x) :
    return x/(1+x+x**2)
def rang(Eps) :
    u = 1
    n = 1
    while u > Eps :
        u = f(u)
        n = n+1
    return n
```

3.3 Etude de suite où le premier terme est négatif

On considère à présent la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $\begin{cases} v_1 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = f(v_n). \end{cases}$

11. Justifier rapidement que pour tout $n \geq 2$, $-1 \leq v_n \leq 0$.
12. Montrer que la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ est décroissante.
13. Conclure quand à la convergence de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

14. Écrire les lignes de codes permettant de tracer le graphique suivant :



15. (a) Résoudre l'équation $f(x) = -1$ d'inconnue x.
    (b) Montrer par l'absurde que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \neq -1$.

11. On a $v_2 = f(v_1) = f(-2) = \frac{-2}{1-2+4} = \frac{-2}{3}$. Comme $v_2 \in [-1, 0]$ et que cette intervalle est stable par f une récurrence montre que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à terme dans $[-1, 0]$ à partir du rang 2.

12. On a vu que la fonction g est négative sur $[-1, 0]$ et comme pour tout $n \geq 2$, $v_n \in [-1, 0]$, on a
$$g(v_n) \leq 0 \Leftrightarrow f(v_n) - v_n \leq 0 \Leftrightarrow v_{n+1} - v_n \leq 0 \Leftrightarrow v_{n+1} \leq v_n.$$
On en déduit donc que la suite $(v_n)_{n\geq 2}$ est décroissante.

13. La suite est décroissante et minorée par -1, elle est donc convergente par le théorème de la limite monotone. On a de plus que la suite converge vers un point fixe de f, donc -1 ou 0.
Comme $v_2 < 0$ et que la suite est décroissante, elle ne peut converger vers 0. On en déduit donc
$$\lim_{n\to+\infty} v_n = -1.$$

14.
```
import matplotlib.pyplot as plt
def Suitev(n) :
        v = -2
        for k in range(1,n) :
                v = v/(1+v+v**2)
        return v
X = range(1,16)
Y = [Suitev(n) for n in X]
plt.plot(X,Y,'x')
plt.grid()
plt.show()
```

15. (a) On a :

$$\begin{aligned} f(x) = -1 &\Leftrightarrow \frac{x}{1+x+x^2} = -1 \Leftrightarrow \frac{x}{1+x+x^2} + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x + 1 + x + x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \end{aligned}$$

L'unique solution de l'équation $f(x) = -1$ est $x = -1$.

(b) Supposons qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $v_n = -1$. Sans perte de généralité on suppose que n est minimal.
Comme $v_1 = -2$, on a $n \geq 2$. On a alors $v_n = f(v_{n-1})$ donc $v_{n-1} = -1$ or cela contredit la minimalité de n ce qui est absurde donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*, v_n \neq -1$.