| ANNEE SCOLAIRE 2024/2025<br>Devoir surveillé sur table $n°1$<br>Date : 20/09/2024 Heure 13h30 Durée : 4h00<br>Les documents et la calculatrice ne sont pas autorisés. | Lycée Jean-Jacques ROUSSEAU Sarcelles |
|---|---|

# 1 Quelques exercices en vrac

## 1.1 Application linéaire sur $\mathbb{R}^3$

On pose $f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z,t) & \mapsto & (2x+y+z, x+y+t) \end{array}$

1. Montrer que $f$ est une application linéaire.
2. Déterminer une base de $\ker(f)$.
3. Déterminer une base $Im(f)$.
4. Donner la matrice de $f$ lorsque l'on munit $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^2$ de leurs bases canoniques.
5. $f$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?

## 1.2 Espace vectoriel

Les deux questions sont indépendantes.

1. On considère la famille $\mathcal{B} = \{x^2+1, x^2+x-1, x^2+x\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$
   (a) Montrer que $1$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$. Procéder de même avec les vecteurs $x$ et $x^2$.
   (b) En déduire que $Vect(1, x, x^2) = Vect(x^2+1, x^2+x-1, x^2+x)$.
   (c) En déduire le rang de la famille $\mathcal{B}$.
2. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et on considère $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$.
   (a) Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à l'aide de la définition d'un sous-espace vectoriel.
   (b) Montrer que $F = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

## 1.3 Équation différentielle

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle
$$(E_H) \ : \ y'' - 4y' + 3y = 0.$$
2. On considère l'équation différentielle
$$(E) \ : \ y'' - 4y' + 3y = 32te^{-t}.$$
   (a) Déterminer une solution particulière de $(E)$ sous la forme $t \mapsto (at+b)e^{-t}$.

(b) Résoudre l'équation différentielle $(E)$.

3. (a) On pose
$$\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = 32te^{-t} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$
Justifier que ce système admet une unique solution.

(b) Déterminer cette unique solution.

### 1.4 Intégrales

Les deux questions sont indépendantes.

1. Énoncer et démontrer le critère de convergence des intégrales de Riemann
2. Soit $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$.
   (a) Déterminer $a, b$ et $c$ tels que $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$.
   (b) Soit $\epsilon \in ]0,1[$. Montrer que $\int_\epsilon^1 \frac{dx}{x(x^2+1)} = -\ln(\epsilon) + \frac{\ln(1+\epsilon^2)}{2} - \frac{\ln(2)}{2}$.
   (c) A l'aide d'une intégration par partie, montrer que
$$\int_\epsilon^1 \frac{x\ln(x)}{(x^2+1)^2}dx = \left[-\frac{\ln(x)}{2(x^2+1)}\right]_\epsilon^1 + \frac{1}{2}\int_\epsilon^1 \frac{dx}{x(x^2+1)}.$$
   (d) En déduire que
$$\int_\epsilon^1 \frac{x\ln(x)}{(x^2+1)^2}dx = \frac{\ln(\epsilon)}{2}\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2+1} + \frac{\ln(1+\epsilon^2)}{4} - \frac{\ln(2)}{4}$$
   (e) En déduire que $\lim\limits_{\epsilon\to 0} \int_\epsilon^1 \frac{x\ln(x)}{(x^2+1)^2}dx = \frac{-\ln(2)}{4}$.

## 2 Problème 1 : Inspiré par Ecricome ECT 2021

On considère
$$f : \begin{array}{ccc} [1,+\infty[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\ln(x)}{x} \end{array}.$$

### 2.1 Étude graphique

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de $f$.

1. Dresser le tableau de variation complet de $f$ sur $[1,+\infty[$.
2. (a) Étudier la convexité de $f$ sur $[1,+\infty[$.
   (b) La courbe $\mathcal{C}_f$ admet-elle un point d'inflexion ?
3. On note $M$ le point d'abscisse $e^{\frac{3}{2}}$ de $\mathcal{C}_f$.
   (a) Déterminer l'équation de la tangente $(T)$ à $\mathcal{C}_f$ au point $M$.
   (b) Quelle est la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $(T)$ sur $[1,+\infty[$ ?
4. Recopier et compléter le code python permettant de tracer $\mathcal{C}_f$, $T$ et le point $M$ sur $[1,6]$ :

```
import ·········
import ·········
X = ·········
Y = ·········
T = ·········
·········
·········
plt.plot([···],[······],'x')
plt.grid()
······
```

### 2.2 Étude d'intégrales impropres

5. Pour tout réel $A$ supérieur ou égal à 1, calculer l'intégrale $I(A) = \int_1^A f(x)dx$.
6. Étudier la convergence de l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$
7. Pour tout réel $A$ supérieur ou égale à 1, on note $J(A) = \int_1^A \frac{\ln(x)}{x^2}dx$.
   (a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que
   $$J(A) = \frac{-\ln(A)}{A} - \frac{1}{A} + 1$$
   (b) Déterminer $\lim\limits_{A \to +\infty} J(A)$.
8. On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par
   $$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) := \begin{cases} 0 & \text{si x <1} \\ \frac{\ln(x)}{x^2} & \text{sinon} \end{cases}$$
   (a) Écrire une fonction python permettant de calculer $g(x)$ pour un $x$ donné.
   (b) Montrer que la fonction $g$ est continue sur $\mathbb{R}$.
   (c) Étudier l'intégrale doublement impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx$.

## 3 Problème 2 : Inspiré par Ecricome ECT 2020

### 3.1 Etude de fonction

On pose $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \frac{x}{1+x+x^2} \end{array}$ et on note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative.

1. Dresser en justifiant le tableau de variation complet de $f$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la tangente de $f$ en 0.
3. Tracer l'allure de $(\mathcal{C}_f)$ ainsi que la droite de la tangente en 0 sur $[-2, 2]$.
4. Donner le code Python permettant de tracer informatiquement le graphique précédent.
5. Justifier que $[-1, 0]$ et $[0, 1]$ sont deux intervalles stables par $f$.
6. Déterminer les points fixes de $f$. (On pourra résoudre directement l'équation.)
7. Déterminer le signe de la fonction $\begin{array}{cccc} g & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & f(x) - x \end{array}$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

## 3.2 Etude de suite où le premier terme est positif

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\left\{\begin{array}{l} u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = f(u_n). \end{array}\right.$

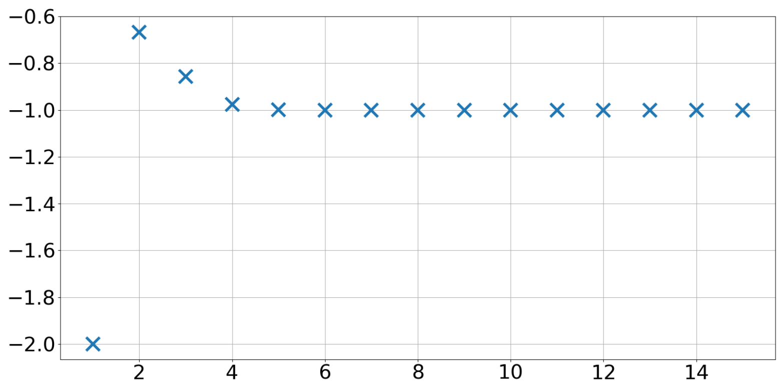
8. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [0,1]$.
9. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n+1}$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$.
   (c) En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (d) Expliquer en quoi la limite trouvé est cohérente avec les résultats trouvés dans la partie précédente.
10. Recopier et compléter le programme python permettant de déterminer le premier entier $n$ tel que $u_n \leq \epsilon$ pour un $\epsilon$ donnée.

```
def f(x) :
        return · · · · · · · · ·
def rang(Eps) :
        u = · · ·
        n = · · ·
        · · · · · · · · · · · ·
                u = · · ·
                n = · · ·
        return · · ·
```

## 3.3 Etude de suite où le premier terme est négatif

On considère à présent la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\left\{\begin{array}{l} v_1 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = f(v_n). \end{array}\right.$

11. Justifier rapidement que pour tout $n \geq 2$, $-1 \leq v_n \leq 0$.
12. Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 2}$ est décroissante.
13. Conclure quand à la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
14. Écrire les lignes de codes permettant de tracer le graphique suivant :




15. (a) Résoudre l'équation $f(x) = -1$ d'inconnue $x$.
    (b) Montrer par l'absurde que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \neq -1$.