

TD 05 - Comparaisons de suites réelles

▷ **Exercice 1 :** Donner toutes les relations de négligeabilité entre les quatre suites suivantes :

$$u_n = n^2 ; v_n = \frac{1}{n^3} ; w_n = \ln(n) ; z_n = e^n.$$

▷ **Exercice 2 :** Déterminer dans chaque cas si l'une des deux suites est négligeable devant l'autre.

- | | |
|--|--|
| 1. $u_n = 1$ et $v_n = \frac{1}{n}$. | 7. $u_n = \ln(n)e^n$ et $v_n = ne^{\frac{n}{2}}$. |
| 2. $u_n = n^7$ et $v_n = (\ln n)^8$. | 8. $u_n = e^{n-1}$ et $v_n = e^{n+1}$. |
| 3. $u_n = e^n$ et $v_n = 2^n$. | 9. $u_n = \frac{\ln n}{n}$ et $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. |
| 4. $u_n = \frac{1}{3^n}$ et $v_n = \frac{1}{2^n}$. | 10. $u_n = n^e$ et $v_n = e^n$. |
| 5. $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \frac{1}{e^n}$. | 11. $u_n = 2^{n^2}$ et $v_n = n^{\sqrt{n}}$. |
| 6. $u_n = n^{\frac{1}{n}}$ et $v_n = \left(\frac{1}{n}\right)^n$. | 12. $u_n = n^{\ln n}$ et $v_n = (\ln n)^n$. |

▷ **Exercice 3 :** L'objectif de cette exercice est de démontrer le théorème 5.2.16.

1. Soit f une fonction. Sous quelle condition la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ existe et quelle est cette valeur ?
2. En conclure, que sous cette condition et si la valeur trouvée de la limite est non nulle, un équivalent en l'infini de $f(u_n) - f(0)$.
3. En déduire les trois équivalents classiques du théorème 5.2.16

▷ **Exercice 4 :** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réel et soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que la suite $(n^\alpha u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit convergente vers un réel l . En déduire une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ simple tel que :

1. si $l = 0$, $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$;
2. si $l \neq 0$, $u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

▷ **Exercice 5 :** Donner un équivalent simple des suites de terme généraux suivants :

- | | |
|--|--|
| 1. $u_n = \ln(2 - e^{-\frac{1}{n^2}})$. | 8. $u_n = \sqrt{1 + \ln(1 + \frac{1}{n})}$. |
| 2. $u_n = (n^2 + n + 3^n)(e^{-n} + 1)$. | 9. $u_n = \sqrt{1 + \ln(1 + \frac{1}{n})} - 1$. |
| 3. $u_n = \frac{\ln n + 2}{4n + 1 + 3^n}$. | 10. $u_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$. |
| 4. $u_n = \frac{e^{\frac{1}{2n}} - 1}{e^{\frac{1}{2n}} + 1}$. | 11. $u_n = \frac{n^{n+1}}{(n+1)^n}$. |
| 5. $u_n = \ln(n^2 + e^n)$. | 12. $u_n = \ln(n+1) - \ln n$. |
| 6. $u_n = e^{n + \ln n + 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{\ln n}}$. | 13. $u_n = n^{n+1} - (n+1)^n$. |
| 7. $u_n = \frac{\sqrt{4n^2 + 5n + 2}}{\sqrt{4n^2 + n + 1}} -$ | 14. $u_n = n^2 + n - e^n + \ln n + e^n$. |
| | 15. $u_n = \frac{n^3 + 6n^2 + 1}{n^4 + 3n^2 - 2n + 1}$. |

