DS 02 - Espaces vectoriels

▷ **Exercice 1 :** On considère la famille $\mathcal{B} = \{(1,-1,2),(2,1,-1),(-1,-5,8)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ n'est pas libre.
2. Montrer qu'elle n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$ et calculer le rang de la famille $\mathcal{B}$.

1. Soit λ, μ et γ trois réels tels que $\lambda(1,-1,2)+\mu(2,1,-1)+\gamma(-1,-5,8) = 0_{\mathbb{R}^3}$. On a

$$\begin{aligned}
&\lambda(1,-1,2)+\mu(2,1,-1)+\gamma(-1,-5,8) = 0_{\mathbb{R}^3}\\
&\Leftrightarrow (\lambda+2\mu-\gamma, -\lambda+\mu-5\gamma, 2\lambda-\mu+8\gamma = (0,0,0)\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda+2\mu-\gamma=0\\ -\lambda+\mu-5\gamma=0\\ 2\lambda-\mu+8\gamma=0\end{cases}\\
&\overset{L_2\leftarrow L_2+L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \lambda+2\mu-\gamma=0\\ 3\mu-6\gamma=0\\ 2\lambda-\mu+8\gamma=0\end{cases}\\
&\overset{L_3\leftarrow L_3-2L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \lambda+2\mu-\gamma=0\\ 3\mu-6\gamma=0\\ -5\mu+10\gamma=0\end{cases}\\
&\overset{L_3\leftarrow \frac{-1}{5}L_3}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \lambda+2\mu-\gamma=0\\ 3\mu-6\gamma=0\\ \mu-2\gamma=0\end{cases} \qquad \overset{L_2\leftarrow \frac{1}{3}L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \lambda+2\mu-\gamma=0\\ \mu-2\gamma=0\\ \mu-2\gamma=0\end{cases}\\
&\overset{L_3\leftarrow \frac{-1}{5}L_3}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \lambda+3\gamma=0\\ \mu=2\gamma\end{cases} \quad \overset{L_3\leftarrow \frac{-1}{5}L_3}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \lambda=-3\gamma\\ \mu=2\gamma\end{cases}
\end{aligned}$$

Par exemple pour $\gamma=1$, on a donc $-3(1,-1,2)+2(2,1,-1)+(-1,-5,8) = (0,0,0)$ donc la famille $\mathcal{B}$ est liée.

2. Ce qui précède nous donne la combinaison linéaire

$$(-1,-5,8) = 3(1,-1,2)-2(2,1,-1),$$

donc on a

$$Vect(\mathcal{B}) = Vect((1,-1,2),(2,1,-1))$$

. Comme $\{(1,-1,2),(2,1,-1)\}$ ne sont pas colinéaire il s'agit d'une famille libre. Il s'agit donc d'une base de $Vect((1,-1,2),(2,1,-1))$ qui est donc un sous espace vectoriel de dimension 2.
On a donc que $\mathcal{B}$ est une famille de rang 2 et comme la dimension de $\mathbb{R}^3$ est $3 \neq 2$, on en déduit que $\mathcal{B}$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$.

▷ **Exercice 2 :** On considère la famille $\mathcal{B} = \{2x^2+3x+1, -x^3+x^2+3, 3x-1, 1\}$ de $\mathbb{R}_3[x]$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_3[x]$.
2. Exprimer $x^3 + 7x^2 + 18x - 6$ dans la base $\mathcal{B}$.

1. On observe que $\deg(2x^2+3x+1) = 2$, $\deg(-x^3+x^2+3) = 3$, $\deg(3x-1) = 1$ et $\deg(1) = 0$ donc la famille $\mathcal{B}$ est une famille échelonnée de polynômes de $\mathbb{R}_3[x]$, elle est donc libre.
   Cette famille est de cardinal 4 et $dim(\mathbb{R}_3[x]) = 3 + 1 = 4$ donc la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_3[x]$.
2. Cherchons les quatre uniques réels a, b, c et d tels que

   $$x^3 + 7x^2 + 18x - 6 = a(2x^2 + 3x + 1) + b(x^3 + x^2 + 3) + c(3x - 1) + d.1.$$

   Réécrivons cette égalité polynomiale :

   $$\begin{aligned} x^3 + 7x^2 + 18x - 6 &= a(2x^2 + 3x + 1) + b(-x^3 + x^2 + 3) + c(3x - 1) + d.1 \\ &\Leftrightarrow 2ax^2 + 3ax + a - bx^3 + bx^2 + 3b + 3cx - c + d = x^3 + 7x^2 + 18x - 6 \\ &\Leftrightarrow -bx^3 + (2a + b)x^2 + (3a + 3c)x + a + 3b - c + d = x^3 + 7x^2 + 18x - 6 \end{aligned}$$

   Par unicité des coefficients d'un polynôme, on a que a, b, c et d est solution de

   $$\begin{aligned} \begin{cases} -b = 1 \\ 2a + b = 7 \\ 3a + 3c = 18 \\ a + 3b - c + d = -6 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ 2a - 1 = 7 \\ 3a + 3c = 18 \\ a + 3b - c + d = -6 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = 4 \\ 3c + 12 = 18 \\ a + 3b - c + d = -6 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = 4 \\ c = 2 \\ d + 4 - 3 - 2 = -6 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -1 \\ c = 2 \\ d = -5 \end{cases} \end{aligned}$$

   On a donc

   $$x^3 + 7x^2 + 18x - 6 = 4(2x^2 + 3x + 1) - (x^3 + x^2 + 3) + 2(3x - 1) - 5.1.$$

$\triangleright$ **<u>Exercice 3 :</u>** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose

$$E_2 = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2X\}.$$

1. Montrer que E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
2. On suppose à présent que $n = 3$ et $A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 \\ -9 & 23 & 15 \\ 12 & -28 & -18 \end{pmatrix}$. Déterminer une base de E_2.

1. Montrons que E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à l'aide de la définition d'un sous-espace vectoriel.
   — E_2 est composé de matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc $E_2 \subset \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$;
   — On a $A0_{n,1} = 0_{n,1}$ donc $0_{n,1} \in E_2$ donc $E_2 \neq \emptyset$;
   — Soit $(X, Y) \in E_2^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$, montrons que $\lambda X + Y \in E_2$. On a par hypothèse $AX = 2X$ et $AY = 2Y$. On en déduit
   $$A(\lambda X + Y) = \lambda AX + AY = 2\lambda X + 2Y = 2(\lambda X + Y).$$
   On a donc bien que $\lambda X + Y \in E_2$.

   E_2 est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

2. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On a
$$\begin{aligned}
X \in E_2 \Leftrightarrow AX = 2X \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 \\ -9 & 23 & 15 \\ 12 & -28 & -18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow & \begin{pmatrix} -x + 7y + 5z \\ -9x + 23y + 15z \\ 12x - 28y - 18z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow & \begin{pmatrix} -3x + 7y + 5z \\ -9x + 21y + 15z \\ 12x - 28y - 20z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} -3x + 7y + 5z = 0 \\ -9x + 21y + 15z = 0 \\ 12x - 28y - 20z = 0 \end{cases} \\
\overset{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1}{\Leftrightarrow} & \begin{cases} -3x + 7y + 5z = 0 \\ 0 = 0 \\ 12x - 28y - 20z = 0 \end{cases} \\
\overset{L_3 \leftarrow L_3 + 4L_1}{\Leftrightarrow} & \begin{cases} -3x + 7y + 5z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow & -3x + 7y + 5z = 0 \Leftrightarrow 3x = 7y + 5z \\
\Leftrightarrow & x = \frac{7}{3}y + \frac{5}{3}z \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{7}{3}y + \frac{5}{3}z \\ y \\ z \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow X = y\begin{pmatrix}\frac{7}{3}\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X \in Vect\left(\begin{pmatrix}\frac{7}{3}\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

On en déduit donc que $E_2 = Vect\left(\begin{pmatrix}\frac{7}{3}\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ et comme la famille $\left\{\begin{pmatrix}\frac{7}{3}\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ est composée de deux vecteurs non colinéaires elle est libre.

On en déduit donc que $\left\{\begin{pmatrix}\frac{7}{3}\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ est une base de E_2.