TD 06 - Séries : Révisions et compléments

▷ **Exercice 1 :**

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout entier $n \geq 3$,

$$\frac{16n-8}{n(n^2-4)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n-2} + \frac{c}{n+2}.$$

2. En déduire la convergence et la valeur de la série $\sum_{n\geq 3} \frac{16n-8}{n(n^2-4)}$

▷ **Exercice 2 :** Étudier la nature des séries numériques suivantes et en cas de convergence calculer leur somme.

1. $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$
2. $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{7^{n-1}}$
3. $\sum_{n\geq 0} \frac{4n^2+5n}{5^n}$
4. $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n n}{3^n}$
5. $\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{(n+1)!}$
6. $\sum_{n\geq 0} \frac{n2^n}{n!}$
7. $\sum_{n\geq 0} (n^2-6n+2)\frac{2^n}{3^n}$
8. $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

▷ **Exercice 3 :**

1. Montrer que la famille $\{1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2)\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[x]$.
2. Déterminer les coordonnées de x^3+2x^2-4x+1 dans cette base.
3. En déduire que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{n^3+2n^2-4n+1}{n!}$ est convergente et calculer sa somme

▷ **Exercice 4 :** On étudie dans cette exercice la série numérique $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$. On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ S_n la somme partielle d'ordre n associée.

1. On pose $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définie par pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$. Montrer qu'il s'agit de deux suites adjacentes.
2. Montrer que la série numérique $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ est semi convergente.

▷ **Exercice 5 :** Déterminer la nature des séries de terme général suivant :

1. $u_n = \frac{n+3}{n^2+n+1}$
2. $u_n = \frac{(n+2)^{\frac{4}{3}}}{(n+1)(n+3)^{\frac{3}{2}}}$
3. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$
4. $u_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$
5. $u_n = \frac{(-1)^n+n}{n^2+1}$
6. $u_n = \frac{4^n-n}{5^n+2n^4}$
7. $u_n = \frac{\ln n}{3n^4-2}$
8. $u_n = \ln \frac{n^4+3n^2+n}{n^4+2n^2-n+1}$
9. $u_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$
10. $u_n = \frac{(-1)^n(n^5+2n^3+1)}{e^n+2}$

▷ **Exercice 6 :** [EML, 1992] On note $\begin{array}{rccc} f & : &]1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \frac{1}{x\ln(x)} \end{array}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, on note $S_n = \sum\limits_{k=2}^{n} f(k)$.

1. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.
2. Montrer, pour tout entier k tel que $k \geq 3$:
$$f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leq f(k-1).$$
3. (a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$:
$$S_n - \frac{1}{2\ln(2)} \leq \int_{2}^{n} f(x)\,dx \leq S_n - \frac{1}{n\ln(n)}.$$
   (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$:
$$\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \leq S_n \leq \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{2\ln(2)}.$$
   (c) Établir $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, on note
$$u_n = S_n - \ln(\ln(n+1)) \text{ et } v_n = S_n - \ln(\ln(n)).$$
   (a) En utilisant le résultat de la question 2, montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 2}$ et $(v_n)_{n\geq 2}$ sont adjacentes. On note l leur limite commune.
   (b) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$:
$$0 \leq v_n - l \leq \frac{1}{n\ln(n)}.$$
   (c) Écrire un code python permettant de déduire une valeur approchée de l à 10^{-2} près.