ANNEE SCOLAIRE 2024/2025 Devoir maison $n°1$ A rendre le 04/11/2024	Lycée Jean-Jacques ROUSSEAU Sarcelles

1 Informatique

1.1 Dichotomie

1. Décrire le principe de la recherche d'une solution par dichotomie.
2. On pose $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\backslash\{-1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^2-x+3}{x+1} \end{array}$. Écrire une fonction python f qui prend en argument x et qui renvoie la valeur $f(x)$ et les lignes de code permettant de tracer la courbe de f sur $[-0.5, 8]$ ainsi que la droite d'équation $y = 5$ sur le même graphe.
3. Déterminer le nombre de solution de l'équation $f(x) = 5$.
4. Recopier et compléter la fonction python Dichotomie qui se trouve en annexe et qui prend en arguments a, b (où $-1 < a < b$) et ϵ et qui renvoie une approximation d'une solution de l'équation $f(x) = 5$ à ϵ si cette solution est dans $[a, b]$. (On supposera la fonction f écrite à la question 2 déjà implémenté en Python.)

1. La recherche par dichotomie permet de rechercher la solution d'une équation que l'on sait contenue dans un intervalle fini. On divise la taille de ce dernier par deux à chaque itération de l'algorithme ce qui nous permet de localiser de plus en plus précisément la solution recherchée.
   En général on utilise la monotonie d'une fonction pour savoir quelle moitié de l'intervalle on conserve à chaque itération.
2.
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def f(x) :
        return (x**2-x+3)/(x+1)
X = np.linspace(-0.5,8,1000)
Y = [f(x) for x in X]
Y2 = [5 for x in X]
plt.plot(X,Y)
plt.plot(X,Y2)
plt.show()
```
3. La fonction f est un quotient de polynômes dont le dénominateur ne s'annule qu'en -1 donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-1)(x+1) - (x^2-x+3).1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2x^2+2x-x-1-x^2+x-3}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{x^2+2x-4}{(x+1)^2}$$

Le discriminant de x^2+2x-4 est $4-4.1.(-4) = 20$ qui est strictement positif donc les deux racines de ce trinôme sont $\alpha = \frac{-2-\sqrt{20}}{2} = -1-\sqrt{5}$ et $\beta = \frac{-2+\sqrt{20}}{2} = -1+\sqrt{5}$. On en déduit le tableau de signe et de variations suivant :

x	$-\infty$		α		-1		β		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty \; \| \; +\infty$	$\searrow$	$f(\beta)$	$\nearrow$	$+\infty$

par calculs de limites classiques.
On a

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{(-1-\sqrt{5})^2-(-1-\sqrt{5})+3}{-1-\sqrt{5}+1} \\ &= \frac{1+2\sqrt{5}+5+1+\sqrt{5}+3}{-\sqrt{5}} = -\frac{10+3\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \\ &= -2\sqrt{5}-3 < 5 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f(\beta) &= \frac{(-1+\sqrt{5})^2-(-1+\sqrt{5})+3}{-1+\sqrt{5}+1} \\ &= \frac{1-2\sqrt{5}+5+1-\sqrt{5}+3}{\sqrt{5}} = \frac{10-3\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \\ &= 2\sqrt{5}-3 < 5 \end{aligned}$$

On observe donc que $5 \notin f(]-\infty,-1[)$ et $5 \in f(]-1,\beta[) =]f(\beta),+\infty[$ ainsi que $5 \in f(]\beta,+\infty[) =]f(\beta),+\infty[$. Comme f est continue et strictement monotone sur $]-\infty,\beta[$ et sur $]\beta,+\infty[$ donc par théorème des valeurs intermédiaires il existe exactement deux racines à l'équation $f(x)=5$ dont une sur $]-1,\beta[$ et la seconde sur $]\beta,+\infty[$.

4.

```
def Dichotomie(a,b,Eps) :
    if (f(a)-5)*(f(b)-5) > 0 :
        return "Pas d'unique solution entre a et b"
    elif f(a) > 5 :
        c = (a+b)/2
        while b-a > Eps :
            if f(c) > 5 :
                a = c
                c = (a+b)/2
            else :
                b = c
                c = (a+b)/2
        return c
    else :
        c = (a+b)/2
        while b-a > Eps :
            if f(c) < 5 :
                a = c
                c = (a+b)/2
            else :
                b = c
                c = (a+b)/2
        return c
```

1.2 Une suite récurrente

On pose la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x+2}{x} \end{array}$ et on considère la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Justifier que l'équation $f(x) = x$ admet exactement une solution α sur $\mathbb{R}_+^*$ et la calculer.
2. Donner les lignes de code python permettant de tracer sur le même graphique la courbe de f et de la droite d'équation $y = x$ sur $[0.01, 3]$.

On se propose à présent d'illustrer informatiquement la progression de la suite pour un u_0 donné. Pour cela on va relier le point (u_0, u_0) à (u_0, u_1) puis à (u_1, u_1) puis à (u_1, u_2) et ainsi de suite. Par exemple pour $u_0 = 3$, on trouve le graphique associé en annexe.

3. Écrire la liste des abscisses et la liste des ordonnées permettant de tracer les segments décrit ci-dessus jusqu'au point de coordonnée (u_5, u_6).
4. Écrire une fonction python Suite prenant en arguments n et u_0 et qui renvoie u_n.
5. Recopier et compléter la fonction ProgressionSuite qui se trouve en annexe et qui prend en argument n et u_0 et qui permet de tracer le dessin rechercher jusqu'au point $(u_n, f(u_n))$. (On suppose les codes précédents déjà implémenté dans Python.)

1. On pose $g : x \mapsto f(x) - x$. Il s'agit d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que quotient de polynômes ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}_+^*$ auquel on ajoute un autre polynôme.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(x) = \frac{x-(x+2).1}{x^2} - 1 = \frac{-2-x^2}{x^2} = -\frac{x^2+2}{x^2} < 0$. g est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
De plus $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ donc $0 \in g(\mathbb{R}_+^*)$ donc comme g est continue, par le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$ soit l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$ que l'on note α.

2.
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
X = np.linspace(0.01,3,1000)
Y = [(x+2)/x for x in X]
plt.plot(X,Y)
plt.plot(X,X)
plt.show()
```

3. La liste des abscisses recherchée est $[u_0, u_0, u_1, u_1, u_2, u_2, u_3, u_3, u_4, u_4, u_5, u_5]$ et la liste des ordonnées recherchée est $[u_0, u_1, u_1, u_2, u_2, u_3, u_3, u_4, u_4, u_5, u_5, u_6]$.

4.
```
def Suite(n,u) :
        for k in range(n) :
                u = (u+2)/u
        return u
```

5.
```
def ProgressionSuite(n,u) :
        U = [Suite(k,u) for k in range(n+1)]
        XP = []
        YP = []
        for k in range(n) :
                XP = XP + [U[k],U[k]]
                YP = YP + [U[k],U[k+1]]
        plt.plot(XP,YP)
        X = np.linspace(1,u+1,1000)
        Y = [(x+2)/x for x in X]
        plt.plot(X,Y)
        plt.plot(X,X)
        plt.grid()
        plt.show()
```

2 Espace vectoriel

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on pose

$$E_\lambda = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda X\}.$$

1. Montrer que E_λ est un espace vectoriel réel.

On pose à présent $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -5 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ -3 & -3 & 5 & -9 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

2. Donner les lignes de code Python permettant de calculer $A^4 - 4A^3 + 4A^2$.

Les lignes de codes précédentes renvoie la matrice 0_4.

3. Factoriser le polynôme $x^4 - 4x^3 + 4x^2$.
4. On note λ_0 et λ_1 les deux racines du polynôme précédent (on suppose que $\lambda_0 < \lambda_1$).
   (a) Déterminer une base $\mathcal{B}_0$ de E_{λ_0}.
   (b) Déterminer une base $\mathcal{B}_1$ de E_{λ_1}.
   (c) La famille $\mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1$ est-elle une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$?

1. Montrons que E_λ est un espace vectoriel en montrant qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Vérifions les trois points de la caractérisation des sous-espaces vectoriels :
   — On observe que E_λ est composé de vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc trivialement $E_\lambda \subset \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   — Le vecteur nul $0_{n,1}$ est un élément de E_λ car $A0_{n,1} = 0_{n,1}$ et $\lambda 0_{n,1} = 0_{n,1}$.
   — Soit X et Y deux éléments de E_λ et soit $\mu \in \mathbb{R}$, montrons que $\mu X + Y \in E_\lambda$. On a par hypothèse $AX = \lambda X$ ainsi que $AY = \lambda Y$.
   On a
   $$A(\mu X + Y) = \mu AX + AY = \mu\lambda X + \lambda Y = \lambda(\mu X + Y)$$
   et donc on a bien $\mu X + Y \in E_\lambda$.

   E_λ est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et donc un espace vectoriel réel.
2.
```
import numpy as np
import numpy.linalg as al
A = np.array([[1,-3,1,-5],[2,0,-2,2],[-3,-3,5,-9],[-2,0,2,-2]])
al.matrix_power(A,4)-4*al.matrix_power(A,3)+4*al.matrix_power(A,2)
```
3. On a
$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 = x^2(x^2 - 4x + 4) = x^2(x-2)^2.$$
4. On pose $\lambda_0 = 0$ et $\lambda_2 = 2$.
   (a) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$. On a

$$X \in E_{\lambda_0} \Leftrightarrow AX = 0_{4,1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -5 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ -3 & -3 & 5 & -9 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + z - 5t = 0 \\ 2x - 2z + 2t = 0 \\ -3x - 3y + 5z - 9t = 0 \\ -2x + 2z - 2t = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4+L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-3y+\ z-5t &= 0 \\ 2x \qquad -2z+2t &= 0 \\ -3x-3y+5z-9t &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3+3L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-\ 3y+\ z-\ 5t = 0 \\ 2x \qquad -2z+\ 2t = 0 \\ \quad -12y+8z-24t = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2-2L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-\ 3y+\ z-\ 5t = 0 \\ \quad 6y-4z+12t = 0 \\ -12y+8z-24t = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3+2L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-3y+\ z-\ 5t &= 0 \\ \quad 6y-4z+12t &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow \frac{1}{6}L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-3y+\ z-5t = 0 \\ \quad y-\frac{2}{3}z+2t = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1+3L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x \qquad -\ z+\ t = 0 \\ \quad y-\frac{2}{3}z+2t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} z-t \\ \frac{2}{3}z-2t \\ z \\ t \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X \in Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

On a donc $E_{\lambda_0} = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et comme $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires ils forment une famille libre et on en déduit que $\mathcal{B}_0 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ est une base de E_{λ_0}.

(b) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$. On a

$$X \in E_{\lambda_1} \Leftrightarrow AX = 2X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -5 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ -3 & -3 & 5 & -9 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + z - 5t = 2x \\ 2x - 2z + 2t = 2y \\ -3x - 3y + 5z - 9t = 2z \\ -2x + 2z - 2t = 2t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x - 3y + z - 5t = 0 \\ 2x - 2y - 2z + 2t = 0 \\ -3x - 3y + 3z - 9t = 0 \\ -2y - 2t = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -x - 3y + z - 5t = 0 \\ x - y - z + t = 0 \\ -3x - 3y + 3z - 9t = 0 \\ -2y - 2t = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow -\frac{1}{3} L_3}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -x - 3y + z - 5t = 0 \\ x - y - z + t = 0 \\ x + y - z + 3t = 0 \\ -2y - 2t = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_4 \leftarrow -\frac{1}{2} L_4}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -x - 3y + z - 5t = 0 \\ x - y - z + t = 0 \\ x + y - z + 3t = 0 \\ y + t = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -x - 3y + z - 5t = 0 \\ x - y - z + t = 0 \\ 2y + 2t = 0 \\ y + t = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_4}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -x - 3y + z - 5t = 0 \\ x - y - z + t = 0 \\ 0 = 0 \\ y + t = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -x - 3y + z - 5t = 0 \\ -4y - 4t = 0 \\ y + t = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - 4L_3}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -x - 3y + z - 5t = 0 \\ 0 = 0 \\ y + t = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -x + z - 2t = 0 \\ 0 = 0 \\ y + t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z - 2t \\ y = \quad -t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} z-2t \\ -t \\ z \\ t \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X \in Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

On a donc $E_{\lambda_1} = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et comme $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires ils forment une famille libre et on en déduit que $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de E_{λ_1}.

(c) Comme $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est de dimension 4 et que $\mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1$ est de cardinal 4, pour montrer qu'il s'agit d'une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il nous suffit de montrer qu'il s'agit d'une famille libre.
Soit $(\lambda, \mu, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cette équation vectorielle se traduit par le système suivant :

$$\begin{cases} \lambda - \mu + \gamma - 2\delta = 0 \\ \frac{2}{3}\lambda - 2\mu - \delta = 0 \\ \lambda + \gamma = 0 \\ \mu + \delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 0 \\ \frac{5}{3}\lambda - 2\mu = 0 \\ \lambda = -\gamma \\ \mu = -\delta \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \lambda = \mu = \gamma = \delta = 0$$

On en déduit donc que $\mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1$ est une famille libre et donc une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

3 Intégrales

Les deux questions sont indépendantes :

1. Étude de $\int_0^{+\infty} \frac{t-1}{t^3+1} dt$.
   (a) Factoriser le polynôme $t^3 + 1$.

(b) Déterminer a, b et c trois réels tels que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\frac{t-1}{t^3+1} = \frac{at+b}{t^2-t+1} + \frac{c}{t+1}.$$

(c) En déduire la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t-1}{t^3+1} dt$ et donner sa valeur dans le cas de convergence.

2. Étude de $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t}\, dt$.

   (a) Étudier l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt$.

   (b) Étudier l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{0} t^2 e^{-t} dt$.

   (c) Conclure quand à la nature de $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t}\, dt$ et donner sa valeur dans le cas de convergence.

1. (a) On observe que -1 est une racine évidente de t^3+1 car $(-1)^3+1 = -1+1 = 0$. Réalisons la division euclidienne de t^3+1 par $t+1$:

$$\begin{array}{rr|l}
t^3 & +1 & t+1 \\ \cline{3-3}
-(t^3+t^2) & & t^2-t+1 \\ \cline{1-2}
-t^2 & +1 & \\
-(-t^2-t) & & \\ \cline{1-2}
 & t+1 & \\
 & -(t+1) & \\ \cline{1-2}
 & 0 &
\end{array}$$

On a donc que $t^3+1 = (t+1)(t^2-t+1)$ et le discriminant de t^2-t+1 est $(-1)^2 - 4.1.1 = -3$ qui est strictement négatif donc le trinôme t^2-t+1 n'admet pas de racine et ne peut pas plus se factoriser. On a donc

$$t^3+1 = (t^2-t+1)(t+1).$$

(b) Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et soit $t \in \mathbb{R}_+$. On a

$$\begin{aligned}
\frac{at+b}{t^2-t+1} + \frac{c}{t+1} &= \frac{(at+b)(t+1)}{(t^2-t+1)(t+1)} + \frac{(c(t^2-t+1)}{(t-1)(t^2-t+1)} \\
&= \frac{at^2+bt+at+b+ct^2-ct+c}{t^3+1} \\
&= \frac{(a+c)t^2+(a+b-c)t+b+c}{t^3+1}
\end{aligned}$$

Pour avoir l'égalité recherchée, on doit avoir l'égalité polynômiale $t-1 = (a+c)t^2+(a+b-c)t+b+c$ et par unicité des coefficients d'un polynôme, on a

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ a+b-c = 1 \\ b+c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -c \\ -3c-1 = 1 \\ b = -1-c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ c = -\frac{2}{3} \\ b = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

On a donc pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\frac{t-1}{t^3+1} = \frac{1}{3}\frac{2t-1}{t^2-t+1} - \frac{2}{3}\frac{1}{t+1}.$$

(c) Comme t^3+1 ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que $t \mapsto \frac{t-1}{t^3+1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ en tant que quotient de polynômes dont le dénominateur ne s'annule jamais. Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$ et l'on a

$$\begin{aligned}
\int_0^A \frac{t-1}{t^3+1}dt &= \frac{1}{3}\int_0^A \frac{2t-1}{t^2-t+1}dt - \frac{2}{3}\int_0^A \frac{1}{t+1}dt \\
&= \frac{1}{3}[\ln(|t^2-t+1|)]_0^A - \frac{2}{3}[\ln(t+1)]_0^A \\
&= \frac{1}{3}(\ln(A^2-A+1)-\ln(1)) - \frac{2}{3}(\ln(A+1)-\ln(1)) \\
&= \frac{\ln(A^2-A+1)-2\ln(A+1)}{3} = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{A^2-A+1}{(A+1)^2}\right) \\
&= \frac{1}{3}\ln\left(\frac{A^2}{A^2}\frac{1-\frac{1}{A}+\frac{1}{A^2}}{\left(1+\frac{1}{A}\right)^2}\right) \\
&= \frac{1}{3}\ln\left(\frac{1-\frac{1}{A}+\frac{1}{A^2}}{\left(1+\frac{1}{A}\right)^2}\right)
\end{aligned}$$

Par continuité du logarithme, on a $\lim_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{t-1}{t^3+1}dt = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{1-0+0}{(1+0)^2}\right) = \frac{1}{3}\ln(1) = 0$. L'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{t-1}{t^3+1}dt$ est donc convergente et l'on a

$$\int_0^{+\infty}\frac{t-1}{t^3+1}dt = 0.$$

2. On observe que $t \mapsto t^2e^{-t}$, ainsi que $t \mapsto t^2$, $t \mapsto t$ et $t \mapsto e^{-t}$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ (et donc continue) ce qui nous permettra de pouvoir intégrer toutes ces fonctions et de réaliser des intégrations par parties à l'aide de multiples de ces dernières.

   (a) Soit $A \in \mathbb{R}_+$. On a

$$\begin{aligned}
\int_0^A t^2e^{-t} &\overset{\text{par IPP}}{=} [-t^2e^{-t}]_0^A - \int_0^A -2te^{-t}dt \\
&= -A^2e^{-A} + \int_0^A 2te^{-t}dt \\
&\overset{\text{par IPP}}{=} -A^2e^{-A} + \left([-2te^{-t}]_0^A - \int_0^A -2e^{-t}dt\right) \\
&= -A^2e^{-A} - 2Ae^{-A} + 2[-e^{-t}]_0^A \\
&= -A^2e^{-A} - 2Ae^{-A} + 2(-e^{-A}+1) \\
&= 2-(A^2+2A+2)e^{-A}
\end{aligned}$$

Par croissance comparée, on a $\lim_{A\to+\infty}\int_0^A f(t)\,dt = 2-0 = 2$ donc l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} t^2e^{-t}\,dt$ est convergente et l'on a

$$\int_0^{+\infty} t^2e^{-t}\,dt = 2.$$

(b) De même, pour $A \in \mathbb{R}_-$. On a

$$\begin{aligned}
\int_A^0 t^2e^{-t} &\overset{\text{par IPP}}{=} [-t^2e^{-t}]_A^0 - \int_A^0 -2te^{-t}dt \\
&= A^2e^{-A} + \int_A^0 2te^{-t}dt \\
&\overset{\text{par IPP}}{=} A^2e^{-A} + \left([-2te^{-t}]_A^0 - \int_A^0 -2e^{-t}dt\right) \\
&= A^2e^{-A} + 2Ae^{-A} + 2[-e^{-t}]_A^0 \\
&= A^2e^{-A} + 2Ae^{-A} + 2(-1+e^{-A}) \\
&= -2 + (A^2+2A+2)e^{-A} = -2 + A^2e^{-A}\left(1+\frac{2}{A}+\frac{2}{A^2}\right)
\end{aligned}$$

On a $\lim\limits_{A\to-\infty} \int_A^0 f(t)\,dt = +\infty$ donc l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^0 t^2e^{-t}\,dt$ est divergente.

(c) L'intégrale doublement impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2e^{-t}\,dt$ est divergente car $\int_{-\infty}^0 t^2e^{-t}\,dt$ est divergente.

4 Polynômes et séries numériques

On considère la famille de polynôme $\mathcal{B} = \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ définie par :

— $P_0(x) = (x+1)(x+2)(x+3)$

— $P_1(x) = x(x+2)(x+3)$

— $P_2(x) = x(x+1)(x+3)$

— $P_3(x) = x(x+1)(x+2)$

1. Montrer que la famille $\mathcal{B}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_3[x]$. (On pourra évaluer une équation vectorielle en certains valeurs de x).
2. En déduire que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_3[x]$.
3. Exprimer $3x^2+7x+6$ dans la base $\mathcal{B}$.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{3n^2+7n+6}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$

4. Justifier à l'aide d'un théorème de comparaison que la série de terme général u_n est convergente.
5. Déterminer quatre réels a, b, c et d tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2} + \frac{d}{n+3}.$$

6. En déduire la valeur exacte de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$.

1. Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\lambda_0P_0(x) + \lambda_1P_1(x) + \lambda_2P_2(x) + \lambda_3P_3(x) = 0.$$

En évaluant l'équation précédent en $x = 0$, on a

$$\lambda_0P_0(0) + \lambda_1P_1(0) + \lambda_2P_2(0) + \lambda_3P_3(0) = 0 \Leftrightarrow 6\lambda_0 = 0$$

donc $\lambda_0 = 0$.
De même, on a en évaluant l'équation en $x = -1$, on a

$$\lambda_1 P_1(-1) + \lambda_2 P_2(-1) + \lambda_3 P_3(-1) = 0 \Leftrightarrow -2\lambda_1 = 0$$

donc $\lambda_1 = 0$.
On évalue à présent en $x = -2$, on a

$$\lambda_2 P_2(-2) + \lambda_3 P_3(-2) = 0 \Leftrightarrow 2\lambda_2 = 0$$

donc $\lambda_2 = 0$.
Il nous reste donc $\lambda_3 P_3(x) = 0$ or P_3 étant non nul on a $\lambda_3 = 0$.
On en déduit donc bien que $\mathcal{B}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_3[x]$.

2. La famille $\mathcal{B}$ est libre et on a que $\dim(\mathbb{R}_3[x]) = 3 + 1 = 4 = Card(\mathcal{B})$ donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_3[x]$.
3. Comme $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_3[x]$ il existe un unique quadruplet de réels $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\lambda_0 P_0(x) + \lambda_1 P_1(x) + \lambda_2 P_2(x) + \lambda_3 P(x) = 3x^2 + 7x + 6.$$

On évalue cette égalité en 0,-1,-2 et en -3 ce qui nous donne le système suivant :

$$\begin{cases} \lambda_0 P_0(0) + \lambda_1 P_1(0) + \lambda_2 P_2(0) + \lambda_3 P(0) = 3.0^2 + 7.0 + 6 \\ \lambda_0 P_0(-1) + \lambda_1 P_1(-1) + \lambda_2 P_2(-1) + \lambda_3 P_3(-1) = 3.(-1)^2 + 7.(-1) + 6 \\ \lambda_0 P_0(-2) + \lambda_1 P_1(-2) + \lambda_2 P_2(-2) + \lambda_3 P_3(-2) = 3.(-2)^2 + 7.(-2) + 6 \\ \lambda_0 P_0(-3) + \lambda_1 P_1(-3) + \lambda_2 P_2(-3) + \lambda_3 P_3(-3) = 3.(-3)^2 + 7.(-3) + 6 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6\lambda_0 = 6 \\ -2\lambda_1 = 2 \\ 2\lambda_2 = 4 \\ -6\lambda_3 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_0 = 1 \\ \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = -2 \end{cases}$$

On a donc

$$3x^2 + 7x + 6 = P_1(x) - P_2(x) + 2P_3(x) - 2P_4(x).$$

4. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant une fraction rationnel, on a

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3n^2}{n.n.n.n} = \frac{3n^2}{n^4} = \frac{3}{n^2}.$$

Par théorème de comparaison sur les séries à termes positifs et par convergence de la série de Riemann de coefficient $\alpha = 2 > 1$, on a que la série numérique de terme général u_n est convergente.
5. Par la question 3, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{P_1(n) - P_2(n) + 2P_3(n) - 2P_4(n)}{n(n+1)(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{2}{n+2} - \frac{2}{n+3} \end{aligned}$$

6. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et calculons $\sum_{n=1}^{N} u_n$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} u_n &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} + 2\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+2} - 2\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+3} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{k=2}^{N+1} \frac{1}{k} + 2\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+2} - 2\sum_{k=2}^{N+1} \frac{1}{k+2} \\
&= \frac{1}{1} + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k} - \frac{1}{N+1} + 2\left(\frac{1}{3} + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n+2} - \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k+2} - \frac{1}{N+3}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{N+1} + \frac{2}{3} - \frac{2}{N+3} = \frac{5}{3} - \frac{1}{N+1} - \frac{2}{N+3}
\end{aligned}$$

On a ainsi $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} u_n = \frac{5}{3} - 0 - 0 = \frac{5}{3}$. On a ainsi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{5}{3}.$$

5 Problème : Série de Bertrand

L'objectif de ce problème est de démontrer le résultat suivant :

Théorème : Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. La série numérique $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$, dites série de Bertrand, est convergente si et seulement si

$$\alpha > 1 \ \text{ ou } \ (\alpha = 1 \ \text{ et } \ \beta > 1)$$

On note pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0; 1\}$ $u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$.

1. Cas $\alpha < 0$: Justifier que dans ce cas la série diverge grossièrement.
2. Cas $\alpha \in [0, 1[$: Justifier que $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$ puis conclure dans ce cas.
3. Cas $\alpha > 1$:
   (a) Déterminer une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$. (On pourra faire intervenir une constante $\delta \in]1, \alpha[$.)
   (b) Conclure dans ce cas.
4. Cas $\alpha = 1$ et $\beta \leq 0$: Justifier par comparaison avec une série bien connue la divergence de la série de Bertrand dans ce cas.
5. Cas $\alpha = 1$ et $\beta > 0$
   (a) On pose $\begin{array}{cccc} f & : & [2, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \frac{1}{x(\ln(x))^\beta} \end{array}$. Dresser le tableau de variation complet de f sur $[2, +\infty[$.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, on a

$$u_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leq u_n$$

(c) En déduire que pour tout $N \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, on a

$$\sum_{n=3}^{N+1} u_n \leq \int_2^{N+1} f(t)\,dt \leq \sum_{n=2}^{N} u_n$$

(d) En déduire que la série de Bertrand $\sum\limits_{n=2}^{\infty} u_n$ et l'intégrale impropre $\int_2^{\infty} f(t)\,dt$ ont la même nature.

(e) A l'aide du changement de variable $x = \ln(t)$ calculer pour tout $(a,b) \in [2,+\infty[^2$, $\int_a^b f(t)\,dt$. (On pourra séparer le cas $\beta = 1$ du cas $\beta \neq 1$.)

(f) En déduire pour quelles valeurs de β l'intégrale impropre $\int_2^{\infty} f(t)\,dt$ est convergente.

(g) Conclure quand à la série de Bertrand.

6. Démontrer le théorème.

On observe dans un premier temps que pour tout entier $n \geq 2$, u_n est strictement positif.

1. On observe que pour tout entier $n \geq 2$, $u_n = \frac{n^{-\alpha}}{(\ln(n))^{\beta}}$ où $-\alpha > 0$ donc (par croissance comparée si $\beta > 0$) on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ donc la série de Bertrand diverge grossièrement dans ce cas.
2. Soit un entier $n \geq 2$ et l'on on a $\frac{\frac{1}{n}}{u_n} = \frac{n^{\alpha}(\ln(n))^{\beta}}{n} = \frac{(\ln(n))^{\beta}}{n^{1-\alpha}}$ et comme $1-\alpha > 0$, on a (par croissance comparée si $\beta > 0$) que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}}{u_n} = 0$ donc $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$.
   Par théorème de comparaison sur les séries numériques à termes positifs et comme la série harmonique est divergente, on en déduit que dans ce cas la série de Bertrand est divergente.
3. (a) Soit $\delta \in]1,\alpha[$ (on peut prendre $\frac{1+\alpha}{2}$ par exemple) et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{1}{n^{\delta}}$.
   On a pour tout entier $n \geq 2$,
   $$\frac{u_n}{v_n} = \frac{n^{\delta}}{n^{\alpha}(\ln(n))^{\beta}} = \frac{1}{n^{\alpha-\delta}(\ln(n))^{\beta}}.$$
   Comme $\alpha - \delta > 0$ par définition de δ, on a (par croissance comparée si $\beta < 0$) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.

   (b) Par théorème de comparaison sur les séries numériques à termes positifs et comme la série de terme générale v_n est convergente en tant que série de Riemann de coefficient $\delta > 1$, on en déduit que dans ce cas la série de Bertrand est convergente.
4. Soit un entier $n \geq 3$, alors $\ln(n) > 1$. Comme $-\beta \geq 0$, on a $(\ln(n))^{-\beta} > 1$ et donc $\frac{(\ln(n))^{-\beta}}{n} > \frac{1}{n}$ soit $u_n > \frac{1}{n}$ et par théorème de comparaison sur les séries à termes positifs, comme la série harmonique est divergente, la série de Bertrand est également divergente dans ce cas.

5. (a) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son ensemble de définition en tant que produit et puissance d'un polynôme et de la fonction logarithme ne s'annulant jamais sur $[2,+\infty[$. On a de plus pour tout $x \in [2,+\infty[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{(\ln(x))^\beta + \beta x \frac{1}{x}(\ln(x))^{\beta-1}}{x^2(\ln(x))^{2\beta}} \\ &= -\frac{(\ln(x))^{\beta-1}(\ln(x)+\beta)}{x^2(\ln(x))^{2\beta}} = -\frac{\ln(x)+\beta}{x^2(\ln(x))^{\beta+1}} < 0 \end{aligned}$$

On a $f(2) = \frac{1}{2(\ln(2))^\beta}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (si $\beta < 1$, l'utilisation de la croissance comparée est nécessaire). On en déduit donc le tableau de variation suivant :

x	2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
f	$\frac{1}{2(\ln(2))^\beta}$	$\searrow$	0

(b) Soit un entier $n \geq 2$. On a que f est décroissante sur $[n, n+1]$ donc pour tout $t \in [n, n+1]$, on a $f(n+1) \leq f(t) \leq f(n)$. On remarque que $f(n+1) = u_{n+1}$ et $f(n) = u_n$. En intégrant l'inégalité sur $[n, n+1]$ on a :

$$\begin{aligned} &\int_n^{n+1} u_{n+1}\,dt \leq \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leq \int_n^{n+1} u_n\,dt \\ \Leftrightarrow\ & u_{n+1}\int_n^{n+1} 1\,dt \leq \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leq u_n \int_n^{n+1} 1\,dt \\ \Leftrightarrow\ & u_{n+1}[t]_n^{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leq u_n[t]_n^{n+1} \\ \Leftrightarrow\ & u_{n+1}(n+1-n) \leq \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leq u_n(n+1-n) \\ \Leftrightarrow\ & u_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leq u_n \end{aligned}$$

(c) Soit un entier $N \geq 2$. On somme l'inégalité précédente pour tout $n \in [\![2, N]\!]$ et l'on a

$$\begin{aligned} &\sum_{n=2}^{N} u_{n+1} \leq \sum_{n=3}^{N} \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leq \sum_{n=3}^{N} u_n \\ \Leftrightarrow\ & \sum_{k=3}^{N+1} u_k \leq \int_2^{N+1} f(t)\,dt \leq \sum_{n=2}^{N} u_n \end{aligned}$$

par utilisation de la relation de Chasles.

(d) La série de Bertrand étant à terme positif, elle est convergente si et seulement si sa somme partielle est bornée.
Si $\int_2^\infty f(t)\,dt$ est convergente alors $\lim\limits_{N\to+\infty} \int_2^{N+1} f(t)\,dt$ est convergente donc par l'inégalité précédente, $\sum\limits_{n=3}^{N+1} u_n$ est bornée par $\int_2^\infty f(t)\,dt$ donc la série de Bertrand est convergente.
Réciproquement si $\int_2^\infty f(t)\,dt$ est divergente, $\lim\limits_{N\to+\infty} \int_2^{N+1} f(t)\,dt$ est divergente donc par l'inégalité précédente, $\sum\limits_{n=2}^{N} u_n$ est diverge également par comparaison donc la série de Bertrand est divergente dans ce cas.
On a donc bien que la série de Bertrand et $\int_2^\infty f(t)\,dt$ ont la même nature.

(e) Soit $(a,b)\in[2,+\infty[^2$. On a

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_{\ln(a)}^{\ln(b)} \frac{dx}{x^\beta}$$

Si $\beta=1$, on a $\int_a^b f(t)\,dt = [\ln(x)]_{\ln(a)}^{\ln(b)} = \ln(\ln(b)) - \ln(\ln(a))$.
Si $\beta\neq 1$, on a $\int_a^b f(t)\,dt = \left[-\frac{1}{(\beta-1)x^{\beta-1}}\right]_{\ln(a)}^{\ln(b)} = \frac{1}{1-\beta}\left(\frac{1}{(\ln(b))^{\beta-1}} - \frac{1}{(\ln(a))^{\beta-1}}\right)$.

(f) Si $\beta=1$, on a $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_2^A f(t)\,dt = \lim\limits_{A\to+\infty} \ln(\ln(A)) - \ln(\ln(2)) = +\infty$ donc dans ce cas l'intégrale impropre est divergente.
Si $\beta<1$, on a

$$\lim_{A\to+\infty} \int_2^A f(t)\,dt = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{1-\beta}\left(\frac{1}{(\ln(A))^{\beta-1}} - \frac{1}{(\ln(2))^{\beta-1}}\right) = +\infty$$

car $\beta-1<0$ donc dans ce cas l'intégrale impropre est divergente.
Si $\beta>1$, on a

$$\lim_{A\to+\infty} \int_2^A f(t)\,dt = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{1-\beta}\left(\frac{1}{(\ln(A))^{\beta-1}} - \frac{1}{(\ln(2))^{\beta-1}}\right) = \frac{1}{(\beta-1)(\ln(2))^{\beta-1}}$$

car $\beta-1>0$ donc dans ce cas l'intégrale impropre est convergente.
L'intégrale impropre $\int_2^{+\infty} f(t)\,dt$ converge donc si et seulement si $\beta>1$.

(g) La série de Bertrand et l'intégrale impropre $\int_2^{+\infty} f(t)\,dt$ ayant la même nature, la série de Bertrand ne converge que si et seulement si $\beta>1$.

6. On a vu précédemment que la série de Bertrand diverge pour $\alpha<1$, converge pour $\alpha>1$ et dépend intégralement de β dans le cas $\alpha=1$.
Dans le cas $\alpha=1$, la série de Bertrand converge si et seulement si $\beta>1$.
En centralisant tout les résultats la série de Bertrand est convergente si et seulement si

$$\alpha>1 \;\text{ ou }\; (\alpha=1 \;\text{ et }\; \beta>1).$$