DS 04 - Comparaisons de suites réelles.

▷ **Exercice 1 :**

1. Énoncé les trois équivalents usuels.
2. Montrer que pour une fonction f dérivable en 0 telle que $f'(0) \neq 0$ et que pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente de limite nulle, on a $f(u_n) - f(0) \underset{n\to+\infty}{\sim} f'(0)u_n$.
3. Démontrer les trois équivalents usuels.

▷ **Exercice 2 :**

1. Rappeler la définition et la caractérisation des relations de négligeabilité des suites.
2. Dans chaque cas dire si il existe une relation de négligeabilité entre les deux suites :
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$, $u_n = \dfrac{1}{n^2}$ et $v_n = \dfrac{n}{n^4-1}$
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{n^2}{n+1}$ et $v_n = \dfrac{n^2+1}{n}$
   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = e^n$ et $v_n = n^n$

▷ **Exercice 3 :**

1. Rappeler la définition et la caractérisation des relations d'équivalences des suites.
2. Déterminer un équivalent simple de chacune des suites suivantes :
   (a) $(u_n)_{n\geq 2}$ où pour tout entier $n \geq 2$, $u_n = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}$
   (b) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ pour $x \in \mathbb{R}$.
   (c) $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\ln(n+1)-\ln(n)}$