DS 04 - Comparaisons de suites réelles.

▷ **Exercice 1 :**

1. Énoncé les trois équivalents usuels.
2. Montrer que pour une fonction f dérivable en 0 telle que $f'(0) \neq 0$ et que pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non nul à partir d'un certain rang et convergente de limite nulle, on a $f(u_n) - f(0) \underset{n\to+\infty}{\sim} f'(0)u_n$.
3. Démontrer les trois équivalents usuels.

1. Voir le cours !
2. Comme f est dérivable en 0, on a que la limite de $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ existe quand x tend vers 0 et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0)$. Comme $f'(0) \neq 0$, on a également $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{f'(0)x} = 1$.
   De plus, comme f est dérivable en 0, f est également continue en 0 et on en déduit que
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(u_n)-f(0)}{f'(0)u_n} = 1$$
   donc par caractérisation des équivalents, on a
   $$f(u_n) - f(0) \underset{n\to+\infty}{\sim} f'(0)u_n.$$
3. Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non nul à partir d'un certain rang et convergente de limite nulle.
   — On pose $f : x \mapsto \ln(1+x)$. Il s'agit d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$ et pour tout $x \in]-1,+\infty[$, on a $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
   On en déduit donc
   $$\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n.$$
   — On pose $f : x \mapsto \exp(x)$. Il s'agit d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = e^x$.
   On en déduit donc
   $$\exp(u_n) - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n.$$
   — Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$. Il s'agit d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ (sur $\mathbb{R}$ si $\alpha \geq 0$) et pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, on a $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$.
   On en déduit donc
   $$(1+u_n)^\alpha - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha u_n.$$

▷ **Exercice 2 :**

1. Rappeler la définition et la caractérisation des relations de négligeabilité des suites.

2. Dans chaque cas dire si il existe une relation de négligeabilité entre les deux suites :

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$, $u_n = \dfrac{1}{n^2}$ et $v_n = \dfrac{n}{n^4-1}$

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{n^2}{n+1}$ et $v_n = \dfrac{n^2+1}{n}$

   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = e^n$ et $v_n = n^n$

1. Voir le cours !
2. On observe que pour chaque cas pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$, u_n et v_n sont des réels non nuls.

   (a) On a
   $$\frac{v_n}{u_n} = \frac{\frac{n}{n^4-1}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^3}{n^4-1} = \frac{1}{n\left(1-\frac{1}{n^4}\right)}$$
   On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{u_n} = 0$ donc on a $v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(u_n)$.

   (b) On a
   $$\frac{u_n}{v_n} = \frac{\frac{n^2}{n+1}}{\frac{n^2+1}{n}} = \frac{n^3}{(n+1)(n^2+1)} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$$
   On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$ donc on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ donc en particulier on a aucune relation de négligeabilité entre ces deux suites.

   (c) On a
   $$\frac{u_n}{v_n} = \frac{e^n}{n^n} = \frac{e^n}{e^{n\ln(n)}} = e^{n(1-\ln(n))}$$
   On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ donc on a $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$.

▷ **<u>Exercice 3 :</u>**

1. Rappeler la définition et la caractérisation des relations d'équivalences des suites.
2. Déterminer un équivalent simple de chacune des suites suivantes :

   (a) $(u_n)_{n\geq 2}$ où pour tout entier $n \geq 2$, $u_n = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}$

   (b) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ pour $x \in \mathbb{R}$.

   (c) $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\ln(n+1)-\ln(n)}$

1. Voir le cours !
2. (a) On observe que pour tout entier $n \geq 2$, on a $u_n = \dfrac{n+1-(n-1)}{(n-1)(n+1)} = \dfrac{2}{n^2-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n^2}$.

(b) On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right)$ or comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x}{n} = 0$, on a

$$n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} n\frac{x}{n} = x.$$

On a donc en particulier que $\lim\limits_{n \to +\infty} n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = x$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = e^x$ et comme $e^x \neq 0$, on a

$$v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} e^x.$$

(c) Procédons par équivalent de quotient. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On a

$$\begin{aligned}
\sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\
&= \frac{n+1-n}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1\right)}.
\end{aligned}$$

On en déduit donc, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1\right) = \sqrt{1+0} + \sqrt{1} = 2$ donc $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}}$.
De plus,

$$\ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n},$$

car $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$.
Par quotient, on a donc

$$w_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{2\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{2\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{2}.$$