DS 05 - Séries numériques

▷ **Exercice 1 :**

1. Montrer que la famille $\mathcal{B} = \{1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2)\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[x]$.
2. Déterminer les coordonnées de $x^3 + 2x^2 - 4x + 1$ dans cette base.
3. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^3 + 2n^2 - 4n + 1}{n!}$ est convergente et calculer sa somme

1. La famille $\mathcal{B}$ est une famille échelonnée de polynômes, elle est donc libre. De plus, elle est de cardinal 4 et $\dim(\mathbb{R}_3(x)) = 4$ donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_3[x]$.
2. On pose $P(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 1$. Il existe donc quatre réels λ, μ, γ et δ tels que $P = \lambda + \mu x + \gamma x(x-1) + \delta x(x-1)(x-2)$. On a

$$\begin{aligned} P(x) &= \lambda + \mu x + \gamma x^2 - \gamma x + \delta x^3 - 3\delta x^2 + 2\delta x \\ &= \delta x^3 + (\gamma - 3\delta)x^2 + (\mu - \gamma + 2\delta)x + \lambda \end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme, on a

$$\begin{cases} \delta = 1 \\ \gamma - 3\delta = 2 \\ \mu - \gamma + 2\delta = -4 \\ \lambda = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta = 1 \\ \gamma = 5 \\ \mu = -1 \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

On a donc

$$P(x) = 1 - x + 5x(x-1) + x(x-1)(x-2).$$

3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{n^3 + 2n^2 - 4n + 1}{n!}$. Soit N un entier valant au moins 3, on a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N} u_n = \sum_{n=0}^{N} \frac{P(n)}{n!} &= \sum_{n=0}^{N} \left[\frac{1 - n + 5n(n-1) + n(n-1)(n-2)}{n!}\right] \\ &= \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} - \sum_{n=0}^{N} \frac{n}{n!} + 5\sum_{n=0}^{N} \frac{n(n-1)}{n!} + \sum_{n=0}^{N} \frac{n(n-1)(n-2)}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} - \sum_{n=1}^{N} \frac{n}{n!} + 5\sum_{n=2}^{N} \frac{n(n-1)}{n!} + \sum_{n=3}^{N} \frac{n(n-1)(n-2)}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n-1)!} + 5\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=3}^{N} \frac{1}{(n-3)!} \\ &= \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!} + 5\sum_{k=0}^{N-2} \frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^{N-3} \frac{1}{k!} \end{aligned}$$

On reconnait des sommes partielles de séries exponentielles qui sont convergentes donc par passage à la limite sur N, on

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N} u_n = e - e + 5e + e = 6e.$$

La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est donc convergente et l'on a $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = 6e$.

▷ **Exercice 2 :** Pour chacune des séries numériques suivantes, dire si elle est convergente ou divergente (et sous quelle condition si nécessaire). Dans le cas de la convergence on donnera la valeur de la somme de la série.

1. $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$
2. $\sum_{n\geq 0} q^n$ (où $q\in\mathbb{R}$)
3. $\sum_{n\geq 1} nq^{n-1}$ (où $q\in\mathbb{R}$)
4. $\sum_{n\geq 2} n(n-1)q^{n-2}$ (où $q\in\mathbb{R}$)
5. $\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}$ (où $x\in\mathbb{R}$)

Voir le cours !

▷ **Exercice 3 :** Déterminer la nature de chacune des séries numériques suivantes :

1. $\sum_{n\geq 0}\frac{n^2+3^n+\ln(n)}{1+n+e^n}$
2. $\sum_{n\geq 1}(3n+n^2-7)\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1\right)$
3. $\sum_{n\geq 1}\frac{(n+2)^{\frac{1}{2}}(n+5)^{\frac{1}{5}}}{n(n+3)^{\frac{1}{3}}(n+4)^{\frac{1}{4}}}$
4. $\sum_{n\geq 0}\frac{n^4+3n+1}{4^n}$
5. $\sum_{n\geq 0}\ln\left(1+\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n^2+1}\right)$

On notera à chaque fois u_n le terme général de la série que l'on considèrera.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = \dfrac{3^n\left(\frac{n^2}{3^n}+1+\frac{\ln(n)}{3^n}\right)}{e^n\left(e^{-n}+ne^{-n}+1\right)}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{3^n}+1+\dfrac{\ln(n)}{3^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n}+ne^{-n}+1 = 1$ par croissances comparées. On a ainsi
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{3}{e}\right)^n.$$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(\dfrac{3}{e}\right)^n$ est positif donc à partir d'un certain rang u_n l'est également. Par théorème de comparaison sur les séries à termes positifs, la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ à la même nature que la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0}\left(\dfrac{3}{e}\right)^n$ qui est une série géométrique de raison $\dfrac{3}{e} > 1$ donc divergente. La série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est donc divergente.
2. On observe que $3n+n^2-7$ est un polynôme donc $3n+n^2-7 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$. De plus comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2} = 0$, on a par équivalent usuel $\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$. On en déduit alors par produit que
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2\frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$
Deux suites équivalentes ayant la même nature, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$ donc la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ diverge grossièrement.
3. Par équivalent des polynômes on a
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{5}}}{nn^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{n^\alpha}$$
où $\alpha = 1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{5} = 1+\dfrac{7}{12}-\dfrac{7}{10} = 1+\dfrac{70-84}{120} = 1-\dfrac{14}{120} < 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{n^\alpha}$ est positif donc à partir d'un certain rang u_n l'est également. Par théorème de comparaison sur les séries à termes positifs, la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ à la même nature que la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^\alpha}$ qui est une série de Riemann de coefficient $\alpha < 1$ donc divergente. La série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est donc divergente.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est positif et par croissance comparée, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2u_n = 0$ donc $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Comme la série $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^2}$ est convergente en tant que série de Riemann de coefficient $\alpha = 2 > 1$, on a par théorème de comparaison sur les séries à termes positifs que la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est également convergente.

5. On observe que $\dfrac{(-1)^n\sqrt{n}}{n^2+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n\sqrt{n}}{n^2} = \dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{2}}}$.

   On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n\sqrt{n}}{n^2+1} = 0$ et donc par équivalent usuel, on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{2}}}$ et donc

$$|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

   Par théorème de comparaison sur les séries à termes positifs, la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} |u_n|$ à la même nature que la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ qui est une série de Riemann de coefficient $\alpha = \dfrac{3}{2} > 1$ donc convergente. La série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} |u_n|$ est donc convergente, soit que la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est absolument convergente et donc la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est convergente.