## *DS 05 - Séries numériques*

▷ **Exercice 1 :**

1. Montrer que la famille $\mathcal{B} = \{1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2)\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[x]$.
2. Déterminer les coordonnées de $x^3 + 2x^2 - 4x + 1$ dans cette base.
3. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^3 + 2n^2 - 4n + 1}{n!}$ est convergente et calculer sa somme

▷ **Exercice 2 :** Pour chacune des séries numériques suivantes, dire si elle est convergente ou divergente (et sous quelle condition si nécessaire). Dans le cas de la convergence on donnera la valeur de la somme de la série.

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} q^n$ (où $q \in \mathbb{R}$)
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} nq^{n-1}$ (où $q \in \mathbb{R}$)
4. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} n(n-1)q^{n-2}$ (où $q \in \mathbb{R}$)
5. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ (où $x \in \mathbb{R}$)

▷ **Exercice 3 :** Déterminer la nature de chacune des séries numériques suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^2 + 3^n + \ln(n)}{1 + n + e^n}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (3n + n^2 - 7)\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - 1\right)$
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(n+2)^{\frac{1}{2}}(n+5)^{\frac{1}{5}}}{n(n+3)^{\frac{1}{3}}(n+4)^{\frac{1}{4}}}$
4. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^4 + 3n + 1}{4^n}$
5. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n^2 + 1}\right)$