ANNEE SCOLAIRE 2024/2025 Devoir surveillé sur table $n°2$ Date : 15/11/2024 Heure 13h30 Durée : 4h00 Les documents et la calculatrice ne sont pas autorisés.	Lycée Jean-Jacques ROUSSEAU Sarcelles

1 Quelques questions sur les séries numériques

Les deux questions sont indépendantes.

1. Déterminer la nature de chacune des séries numériques suivantes :
   (a) $u_n = \frac{n^4+8n^3+7n-4}{n^4-7n^5+3n+1}$
   (b) $v_n = \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2-1}\right)$
   (c) $w_n = \left(\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} \left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)$
2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{3n^2+2n+24}{3^n}$
   (a) Justifier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ à l'aide d'un théorème de comparaison.
   (b) Calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

2 EML 1992

On note $\begin{array}{cccc} f & : &]1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \frac{1}{x\ln(x)} \end{array}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, on note $S_n = \sum\limits_{k=2}^{n} f(k)$.

1. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.
2. Montrer, pour tout entier k tel que $k \geq 3$:
$$f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leq f(k-1).$$
3. (a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$:
$$S_n - \frac{1}{2\ln(2)} \leq \int_2^n f(x)\,dx \leq S_n - \frac{1}{n\ln(n)}.$$
   (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$:
$$\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \leq S_n \leq \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{2\ln(2)}.$$
   (c) Établir $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, on note
$$u_n = S_n - \ln(\ln(n+1)) \text{ et } v_n = S_n - \ln(\ln(n)).$$
   (a) En utilisant le résultat de la question 2, montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 2}$ et $(v_n)_{n\geq 2}$ sont adjacentes. On note l leur limite commune.
   (b) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$:
$$0 \leq v_n - l \leq \frac{1}{n\ln(n)}.$$
   (c) Écrire un code python permettant de déduire une valeur approchée de l à 10^{-2} près.

3 EDHEC 2017

On note E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 et on rappelle que la famille (e_0, e_1, e_2) est une base de E, les fonctions e_0, e_1, e_2 étant définies par :
$$\forall t \in \mathbb{R}, e_0(t) = 1, e_1(t) = t \text{ et } e_2(t) = t^2.$$
On considère l'application φ qui, à toute fonction P de E, associe la fonction, notée $\varphi(P)$, définie par
$$\forall x \in \mathbb{R}, (\varphi(P))(x) = \int_0^1 P(x+t)\,dt.$$

1. (a) Montrer que φ est linéaire.
   (b) Déterminer $(\varphi(e_0))(x)$, $(\varphi(e_1))(x)$ et $(\varphi(e_2))(x)$ en fonction de x, puis écrire $\varphi(e_0), \varphi(e_1)$ et $\varphi(e_2)$ comme combinaisons linéaires de e_0, e_1, e_2.
   (c) Déduire des questions précédentes que φ est un endomorphisme de E.
2. (a) Écrire la matrice A de φ dans la base (e_0, e_1, e_2). On vérifiera que la première ligne de A est
$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$
   (b) Justifier que φ est un automorphisme de E.
3. Donner les lignes de code d'une fonction python permettant de renvoyer A^n pour un entier n donné.
4. (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, il existe un réel u_n tel que l'on ait
$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Donner u_0 et établir que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{6}(3n+2).$$
   (b) En déduire, par sommation, l'expression de u_n pour tout entier naturel n.
   (c) Écrire A^n sou forme de tableau matriciel.

4 Ecricome 2019

On considère dans cet exercice l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, dont on note $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Partie A

1. (a) Calculer A^2 puis vérifier que A^3 est la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (b) Déterminer une base et la dimension du noyau de f.
2. Soient $e'_1 = (-1, -1, 1)$, $e'_2 = (2, -1, 1)$ et $e'_3 = (-1, 2, 1)$.
   (a) Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ est une base de E.
   (b) Démontrer que la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$ est la matrice $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. On pose :
$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
   On note h l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice M.
   (a) Déterminer deux réels α et β tels que $M = \alpha A + \beta I$, où I est la matrice identité d'ordre 3.
   (b) Déterminer la matrice M' de h dans la base $\mathcal{B}'$.
   (c) En déduire que M est inversible.
   (d) À l'aide de la question $1.a$, calculer $(M - I)^3$. En déduire l'expression de M^{-1} en fonction des matrices I, M et M^2.
   (e) À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer M^n pour tout entier naturel n, en fonction des matrices I, A et A^2.
   Cette formule est-elle vérifiée pour $n = -1$?

Partie B

Dans cette partie, on veut montrer qu'il n'existe aucun endomorphisme g de E vérifiant $g \circ g = f$. On suppose donc par l'absurde qu'il existe une matrice V carrée d'ordre 3 telle que :

$$V^2 = T.$$

On note g l'endomorphisme dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}'$ est V.

1. Montrer que $VT = TV$. En déduire que $g \circ f = f \circ g$.
2. (a) Montrer que $g(e'_1)$ appartient au noyau de f.
   En déduire qu'il existe un réel a tel que $g(e'_1) = ae'_1$.

(b) Montrer que $g(e'_2) - ae'_2$ appartient au noyau de f.
En déduire qu'il existe un réel b tel que $g(e'_2) = be'_1 + ae'_2$.

(c) Montrer que : $f \circ g(e'_3) = g \circ f(e'_3) = ae'_2 + be'_1$.
En déduire que $g(e'_3) - ae'_3 - be'_2$ appartient au noyau de f.

(d) En déduire qu'il existe un réel c tel que : $V = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

3. Calculer V^2 en fonction de a, b et c, puis en utilisant l'hypothèse $V^2 = T$, obtenir une contradiction.