ANNEE SCOLAIRE 2024/2025 Devoir surveillé sur table $n°2$ Date : 15/11/2024 Heure 13h30 Durée : 4h00 Les documents et la calculatrice ne sont pas autorisés.	Lycée Jean-Jacques ROUSSEAU Sarcelles

1 Quelques questions sur les séries numériques

Les deux questions sont indépendantes.

1. Déterminer la nature de chacune des séries numériques suivantes :
   (a) $u_n = \frac{n^4+8n^3+7n-4}{n^4-7n^5+3n+1}$
   (b) $v_n = \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2-1}\right)$
   (c) $w_n = \left(\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} \left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)$
2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{3n^2+2n+24}{3^n}$
   (a) Justifier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ à l'aide d'un théorème de comparaison.
   (b) Calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

1. (a) Nous sommes en présence d'une fraction rationnelle donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^4}{-7n^5} = -\frac{1}{7n}$, soit $-u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n}$ est positif donc à partir d'un certain rang $-u_n$ l'est également. Par théorème de comparaison sur les séries à termes positifs, la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} -u_n$ à la même nature que la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ qui est la série harmonique donc divergente. La série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} -u_n$ et donc la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ sont divergentes.

   (b) Pour tout entier $n \geq 2$, $v_n = \ln\left(\frac{n^2-1+n+2}{n^2-1}\right) = \ln\left(1+\frac{n+2}{n^2-1}\right)$. Comme $\frac{n+2}{n^2-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n^2-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc par équivalent usuel, on a
$$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n+2}{n^2-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n}$ est positif donc à partir d'un certain rang v_n l'est également. Par théorème de comparaison sur les séries à termes positifs, la série numérique $\sum\limits_{n\geq 2} v_n$ à la même nature que la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ qui est la série harmonique donc divergente. La série numérique $\sum\limits_{n\geq 2} v_n$ et est donc divergente.

(c) Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, on a par équivalents usuels

$$\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{1\sqrt{n}}}-1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2n\sqrt{n}}.$$

De plus $\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} = e^0.\sqrt{1+0} = 1$ donc

$$w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n\sqrt{n}}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2n\sqrt{n}}$ est positif donc à partir d'un certain rang w_n l'est également. Par théorème de comparaison sur les séries à termes positifs, la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} w_n$ à la même nature que la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ qui est une série de Riemann de coefficient $\alpha = \frac{3}{2} > 1$ donc convergente. La série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} w_n$ est donc convergente.

2. (a) On observe que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est positif et par croissance comparée, on a $\lim_{n\to+\infty} n^2 u_n = 0$ donc $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
Comme la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente en tant que série de Riemann de coefficient $\alpha = 2 > 1$, on a par théorème de comparaison sur les séries à termes positifs que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est convergente.

(b) Réécrivons u_n comme la somme de termes de séries géométriques (y compris des dérivées première et seconde). Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
u_n &= (3n(n-1+1)+2n+24)\left(\frac{1}{3}\right)^n \\
&= (3n(n-1)+5n+24)\left(\frac{1}{3}\right)^n \\
&= \frac{3}{3^2}n(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} + \frac{5}{3}n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 24\left(\frac{1}{3}\right)^n
\end{aligned}$$

On en déduit, par convergence de toutes les séries car $\frac{1}{3} \in]-1,1[$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} u_n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3}n(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} + \frac{5}{3}n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 24\left(\frac{1}{3}\right)^n \\
&= \frac{3}{3^2}\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} + \frac{5}{3}\sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 24\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n \\
&= \frac{1}{3}\frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3} + \frac{5}{3}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} + \frac{24}{1-\frac{1}{3}} \\
&= \frac{2}{3}\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^3} + \frac{5}{3}\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} + \frac{24}{\frac{2}{3}} \\
&= \frac{9}{4} + \frac{15}{4} + 36 = \frac{24}{4} + 36 \\
&= 42.
\end{aligned}$$

On a donc
$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = 42.$$

2 EML 1992

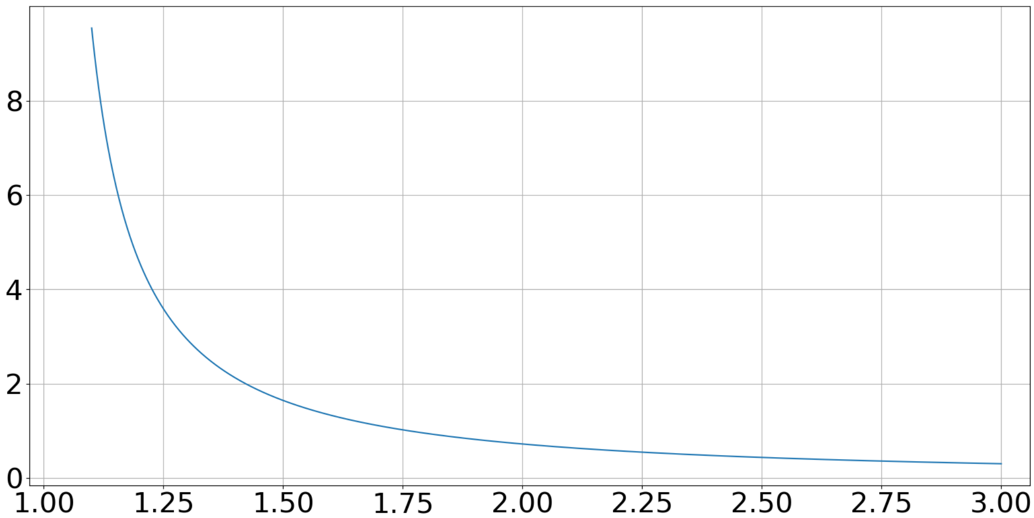
On note $f : \begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x\ln(x)} \end{array}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, on note $S_n = \sum\limits_{k=2}^{n} f(k)$.

1. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.
2. Montrer, pour tout entier k tel que $k \geq 3$:
$$f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leq f(k-1).$$
3. (a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$:
$$S_n - \frac{1}{2\ln(2)} \leq \int_{2}^{n} f(x)\,dx \leq S_n - \frac{1}{n\ln(n)}.$$
   (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$:
$$\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \leq S_n \leq \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{2\ln(2)}.$$
   (c) Établir $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, on note
$$u_n = S_n - \ln(\ln(n+1)) \ \text{ et } \ v_n = S_n - \ln(\ln(n)).$$
   (a) En utilisant le résultat de la question 2, montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 2}$ et $(v_n)_{n\geq 2}$ sont adjacentes. On note l leur limite commune.
   (b) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$:
$$0 \leq v_n - l \leq \frac{1}{n\ln(n)}.$$
   (c) Écrire un code python permettant de déduire une valeur approchée de l à 10^{-2} près.

1. On observe que $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ en tant que fonctions de référence et elles ne s'annulent jamais sur cette intervalle. On a donc que f est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$. On a donc pour tout $x \in]1,+\infty[$:
$$f'(x) = -\frac{1\ln(x) + x\frac{1}{x}}{(x\ln(x))^2} = -\frac{\ln(x)+1}{(x\ln(x))^2} < 0$$
La fonction f est donc strictement décroissante sur $]1,+\infty[$.
On a $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. On en déduit donc le tableau de variation suivant :

x	1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0

La courbe représentative est :



2. Soit k un entier valant au moins 3. Comme f est décroissante sur $[k-1, k]$, on a pour tout $x \in [k-1, k]$,

$$f(k) \leq f(x) \leq f(k-1)$$

et en intégrant cette inégalité sur $[k-1, k]$, on a

$$f(k) = \int_{k-1}^{k} f(k)\ dx \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\ dx \leq \int_{k-1}^{k} f(k-1)\ dx = f(k-1).$$

3. (a) Soit n un entier valant au moins 3, on a en sommant l'inégalité précédente pour tout $k \in [\![3, n]\!]$:

$$\sum_{k=3}^{n} f(k) \leq \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)\ dx \leq \sum_{k=3}^{n} f(k-1)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=3}^{n} f(k) \leq \int_{2}^{n} f(x)\ dx \leq \sum_{k=3}^{n} f(k-1) \text{ par relation de Chasles}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=2}^{n} f(k) - f(2) \leq \int_2^n f(x)\, dx \leq \sum_{j=2}^{n-1} f(j) \text{ par changement d'indice}$$
$$\Leftrightarrow S_n - \frac{1}{2\ln(2)} \leq \int_2^n f(x)\, dx \leq S_n - f(n)$$
$$\Leftrightarrow S_n - \frac{1}{2\ln(2)} \leq \int_2^n f(x)\, dx \leq S_n - \frac{1}{n\ln(n)}$$

Pour $n = 2$, on observe que $S_2 = \frac{1}{2\ln(2)}$ donc $S_n - \frac{1}{2\ln(2)} = S_n - \frac{1}{n\ln(n)} = 0$. De plus $\int_2^2 f(x)\, dx = 0$ donc l'inégalité est également vérifiée pour $n = 2$

(b) Soit $n \geq 2$. On considère l'inégalité précédente et l'on a :

$$S_n - \frac{1}{2\ln(2)} \leq \int_2^n f(x)\, dx \leq S_n - \frac{1}{n\ln(n)}$$
$$\Leftrightarrow S_n - \int_2^n f(x)\, dx - \frac{1}{2\ln(2)} \leq 0 \leq S_n - \int_2^n f(x)\, dx - \frac{1}{n\ln(n)}$$
$$\Leftrightarrow -\int_2^n f(x)\, dx - \frac{1}{2\ln(2)} \leq -S_n \leq -\int_2^n f(x)\, dx - \frac{1}{n\ln(n)}$$
$$\Leftrightarrow \int_2^n f(x)\, dx + \frac{1}{2\ln(2)} \geq S_n \geq \int_2^n f(x)\, dx + \frac{1}{n\ln(n)}$$

On a $\int_2^n f(x)\, dx = [\ln(\ln(x))]_2^n = \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2))$ et en substituant dans la dernière inégalité obtenue, on a

$$\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{n\ln(n)} \leq S_n \leq \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{2\ln(2)}$$

Comme $n \geq 2$, on a $\frac{1}{n\ln(n)} \geq 0$ donc $\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \leq \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{n\ln(n)}$ ce qui nous donne donc

$$\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \leq S_n \leq \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{2\ln(2)}.$$

(c) Pour tout entier n valant au moins 2, on a $\ln(\ln(n)) > 0$ et l'on a par l'inégalité précédente

$$1 - \frac{\ln(\ln(2))}{\ln(\ln(n))} \leq \frac{S_n}{\ln(\ln(n))} \leq 1 - \frac{\ln(\ln(2))}{\ln(\ln(n))} + \frac{1}{2\ln(2)n\ln(\ln(n))}$$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(\ln(2))}{\ln(\ln(n))} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2\ln(2)\ln(\ln(n))} = 0$ donc par théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\ln(\ln(n))} = 1$, soit

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n)).$$

4. (a) Montrons que les suites $(u_n)_{n\geq 2}$ et $(v_n)_{n\geq 2}$ sont adjacentes. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$

- $$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= S_{n+1} - \ln(\ln((n+1)+1)) - (S_n - \ln(\ln(n+1))) \\ &= S_{n+1} - S_n - (\ln(\ln(n+2)) - \ln(\ln(n+1)) \\ &= f(n+1) - \int_{n+1}^{n+2} f(x)\,dx \geq 0 \end{aligned}$$

  par utilisation de la question 2 avec $k = n+2$. On a alors que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est croissante.

- $$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= S_{n+1} - \ln(\ln(n+1)) - (S_n - \ln(\ln(n))) \\ &= S_{n+1} - S_n - (\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n)) \\ &= f(n+1) - \int_{n}^{n+1} f(x)\,dx \leq 0 \end{aligned}$$

  par utilisation de la question 2 avec $k = n+1$. On a alors que la suite $(v_n)_{n\geq 2}$ est décroissante.

- $$\begin{aligned} u_n - v_n &= \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n)) = \ln\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right) \\ &= \ln\left(\frac{\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right) = \ln\left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n\ln(n)} \end{aligned}$$

  par équivalent usuel car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n\ln(n)} = 0$ et que deux suites équivalentes ont même nature et même limite dans le cas de convergence, on en déduit que

  $$\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0.$$

On a donc bien que les deux suites $(u_n)_{n\geq 2}$ et $(v_n)_{n\geq 2}$ sont adjacentes.

(b) Comme $(u_n)_{n\geq 2}$ et $(v_n)_{n\geq 2}$ sont adjacentes de limite commune l et que les suites sont respectivement croissante et décroissante, on a pour tout entier n valant au moins 2,

$$(u_n \leq) l \leq v_n \Leftrightarrow (u_n - v_n \leq) 0 \leq v_n - l$$

ce qui nous donne nous donne la première inégalité recherchée.
Comme $u_n \leq l$, on a également

$$\begin{aligned} v_n - l \leq v_n - u_n &= \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n)) \\ &= \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n) = \frac{1}{n\ln(n)} \end{aligned}$$

par l'inégalité de la question 2 avec $k = n+1$.
On a donc bien pour tout $n \geq 2$,

$$0 \leq v_n - l \leq \frac{1}{n\ln(n)}.$$

(c)

```
import numpy as np
def Approxi(Eps) :
    n = 2
    V = 1/(2*np.log(2)) - np.log(np.log(2))
    while 1/(n*np.log(n)) > Eps :
        V = V + 1/((n+1)*np.log(n+1)) - np.log(np.log(n+1)) + np.log(np.log(n))
        n = n + 1
    return V
```

3 EDHEC 2017

On note E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 et on rappelle que la famille (e_0, e_1, e_2) est une base de E, les fonctions e_0, e_1, e_2 étant définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, e_0(t) = 1, e_1(t) = t \text{ et } e_2(t) = t^2.$$

On considère l'application φ qui, à toute fonction P de E, associe la fonction, notée $\varphi(P)$, définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\varphi(P))(x) = \int_0^1 P(x+t)\, dt.$$

1. (a) Montrer que φ est linéaire.
   (b) Déterminer $(\varphi(e_0))(x)$, $(\varphi(e_1))(x)$ et $(\varphi(e_2))(x)$ en fonction de x, puis écrire $\varphi(e_0), \varphi(e_1)$ et $\varphi(e_2)$ comme combinaisons linéaires de e_0, e_1, e_2.
   (c) Déduire des questions précédentes que φ est un endomorphisme de E.
2. (a) Écrire la matrice A de φ dans la base (e_0, e_1, e_2). On vérifiera que la première ligne de A est
   $$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$
   (b) Justifier que φ est un automorphisme de E.
3. Donner les lignes de code d'une fonction python permettant de renvoyer A^n pour un entier n donné.
4. (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, il existe un réel u_n tel que l'on ait
   $$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Donner u_0 et établir que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{6}(3n+2).$$

(b) En déduire, par sommation, l'expression de u_n pour tout entier naturel n.

(c) Écrire A^n sous forme de tableau matriciel.

1. (a) Soit $(P, Q) \in E^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $\varphi(\lambda P + Q) = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)$. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}(\varphi(\lambda P + Q))(x) &= \int_0^1 (\lambda P + Q)(x+t)\, dt = \int_0^1 \lambda P(x+t) + Q(x+t)\, dt \\ &= \lambda \int_0^1 P(x+t)\, dt + \int_0^1 Q(x+t)\, dt \\ &= \lambda(\varphi(P))(x) + (\varphi(Q))(x)\end{aligned}$$

L'égalité étant vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a donc $\varphi(\lambda P + Q) = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)$, soit que φ est une application linéaire.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

- $(\varphi(e_0))(x) = \int_0^1 e_0(x+t)\, dt = \int_0^1 1\, dt = [t]_0^1 = 1 = e_0(x)$
- $(\varphi(e_1))(x) = \int_0^1 e_1(x+t)\, dt = \int_0^1 x+t\, dt = \left[xt + \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}e_0(x) + e_1(x)$
- $(\varphi(e_2))(x) = \int_0^1 e_2(x+t)\, dt = \int_0^1 (x+t)^2\, dt = \int_0^1 x^2 + 2xt + t^2\, dt = \left[x^2t + xt^2 + \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = x^2 + x + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}e_0(x) + e_1(x) + e_2(x)$

On en déduit donc que $\varphi(e_0) = e_0$, $\varphi(e_1) = \frac{1}{2}e_0 + e_1$ et $\varphi(e_2) = \frac{1}{3}e_0 + e_1 + e_2$.

(c) On observe que $\varphi(e_i) \in E$ pour tout $i \in [\![0, 2]\!]$ et comme (e_0, e_1, e_2) est une base de E, on en déduit que pour tout $P \in E$, $\varphi(P) \in E$. On a donc que $Im(\varphi) \subset E$ et donc φ est bien un endomorphisme de E.

2. (a) Par les calculs précédent, on a $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) A est une matrice triangulaire qui est donc inversible si et seulement si tout les coefficients de la diagonale sont non nuls, ce qui est le cas ici donc A est inversible. Autrement dit, l'endomorphisme associée à A est bijectif, soit φ est un endomorphisme de E bijectif, c'est-à-dire un automorphisme de E.

3.
```
import numpy as np
import numpy.linalg as al
A = np.array([[1,1/2,1/3],[0,1,1],[0,0,1]])
def PuissanceA(n) :
        return al.matrix_power(A,n)
```

4. (a) On pose $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{6}(3n + 2)$. Montrons par récurrence à présent que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Initialisation : Pour $n = 0$, on a $A^0 = I_3$ et $\begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$ ce qui nous permet de vérifier notre initialisation.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque. Supposons l'égalité vraie au rang n et montrons là au rang $n+1$, autrement dit supposons que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et montrons que $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n+1}{2} & u_{n+1} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
On a
$$\begin{aligned} A^{n+1} = AA^n &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2}+\frac{1}{2} & u_n+\frac{n}{2}+\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n+1}{2} & u_n+\frac{1}{6}(3n+2) \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{n+1}{2} & u_{n+1} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
ce qui correspond bien à l'égalité recherchée.
- Conclusion : L'égalité est initialisée au rang 0 et est héréditaire à partir de ce rang donc par le principe de récurrence, nous avons montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) On rappelle que $u_0 = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et sommons l'égalité $u_{k+1} = u_k + \frac{1}{6}(3k+2)$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$. On a alors :
$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} u_k + \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{n-1} 3k+2 \\ \Leftrightarrow &\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} u_k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} k + \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n-1} 1 \\ \Leftrightarrow &\sum_{k=1}^{n-1} u_k + u_n = u_0 + \sum_{k=1}^{n-1} u_k + \frac{1}{2}\frac{(n-1)(n-1+1)}{2} + \frac{1}{3}(n-1-0+1) \\ \Leftrightarrow &u_n = 0 + \frac{n(n-1)}{4} + \frac{n}{3} = \frac{3n(n-1)+4n}{12} = \frac{n(3n-3+4)}{12} \\ \Leftrightarrow &u_n = \frac{n(3n+1)}{12} \end{aligned}$$
Cette formule est également valable pour $n = 0$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = \frac{n(3n+1)}{12}.$$

(c) On a par ce qui précède pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & \frac{n(3n+1)}{12} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4 Ecricome 2019

On considère dans cet exercice l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, dont on note $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Partie A

1. (a) Calculer A^2 puis vérifier que A^3 est la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (b) Déterminer une base et la dimension du noyau de f.
2. Soient $e_1' = (-1, -1, 1)$, $e_2' = (2, -1, 1)$ et $e_3' = (-1, 2, 1)$.
   (a) Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = \{e_1', e_2', e_3'\}$ est une base de E.
   (b) Démontrer que la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$ est la matrice $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. On pose :
   $$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
   On note h l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice M.
   (a) Déterminer deux réels α et β tels que $M = \alpha A + \beta I$, où I est la matrice identité d'ordre 3.
   (b) Déterminer la matrice M' de h dans la base $\mathcal{B}'$.
   (c) En déduire que M est inversible.
   (d) À l'aide de la question $1.a$, calculer $(M - I)^3$. En déduire l'expression de M^{-1} en fonction des matrices I, M et M^2.
   (e) À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer M^n pour tout entier naturel n, en fonction des matrices I, A et A^2.
   Cette formule est-elle vérifiée pour $n = -1$?

1. (a) On a

$$A^2 = A.A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1+-2+1 & -2-2+1 & -1-4+2 \\ 1+1-2 & -2+1-2 & -1+2-4 \\ -1-1+2 & 2-1+2 & 1-2+4 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

De même,

$$A^3 = A^2.A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0+1-1 & 0+1-1 & 0+2-2 \\ 0+1-1 & 0+1-1 & 0+2-2 \\ 0-1+1 & 0-1+1 & 0-2+2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3.$$

(b) Soit $(x, y, z) \in E$. On a

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in \ker(f) &\Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -x+2y+z \\ -x-y-2z \\ x+y+2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -x+2y+z=0 \\ -x-y-2z=0 \\ x+y+2z=0 \end{cases} \\
&\overset{L_3 \leftarrow L_3+L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -x+2y+z=0 \\ -x-y-2z=0 \\ 0=0 \end{cases} \\
&\overset{L_2 \leftarrow L_2-L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -x+2y+z=0 \\ -3y-3z=0 \end{cases} \\
&\overset{L_2 \leftarrow \frac{-1}{3}L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -x+2y+z=0 \\ y+z=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x=-z \\ y=-z \end{cases} \\
&\Leftrightarrow (x,y,z) = z(-1,-1,1) \\
&\Leftrightarrow (x,y,z) \in Vect((-1,-1,1))
\end{aligned}$$

On en déduit donc que $\ker(f) = Vect((-1,-1,1))$ et comme $(-1,-1,1)$ est un vecteur non nul de E, il forme une famille libre et $\{(-1,-1,1)\}$ est une base de $\ker(f)$.
$\ker(f)$ est donc de dimension 1.

2. (a) Montrons que $\mathcal{B}'$ est une famille libre de E. Soit $(\lambda, \mu, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda e'_1 + \mu e'_2 + \gamma e'_3 = 0_E$. Cette équation vectorielle se traduit en le système suivant :

$$\begin{cases} -\lambda + 2\mu - \gamma = 0 \\ -\lambda - \mu + 2\gamma = 0 \\ \lambda + \mu + \gamma = 0 \end{cases} \overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -\lambda + 2\mu - \gamma = 0 \\ -\lambda - \mu + 2\gamma = 0 \\ 3\mu = 0 \end{cases}$$

$$\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -\lambda + 2\mu - \gamma = 0 \\ -3\mu + 3\gamma = 0 \\ 3\mu = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \mu = \gamma = \lambda = 0$$

On en déduit donc que la famille $\mathcal{B}'$ est libre, or cette dernière est de cardinal 3 et l'espace vectoriel réel E est également de dimension 3, donc $\mathcal{B}'$ est une base de E.

(b) On a $e'_1 \in \ker(f)$ donc $f(e'_1) = 0$. Pour calculer $f(e'_2)$ et $f(e'_3)$ considérons le pendant matricielle de ces calculs :

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2-2+1 \\ -2+1-2 \\ 2-1+2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1+4+1 \\ 1-2-2 \\ -1+2+2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit alors que $f(e'_2) = e'_1 = 1.e'_1 + 0.e'_2 + 0.e'_3$ et $f(e'_3) = e'_2 = 0.e'_1 + 1.e'_2 + 0.e'_3$ et donc la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ est

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. (a) On remarque que tout les coefficients de M en dehors de la diagonale sont les opposées de ceux de A. Calculons donc $M + A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = I$.

On a donc

$$M = -A + I.$$

(b) Calculons $h(e'_1), h(e'_2)$ et $h(e'_3)$ en fonction des vecteurs de la base $\mathcal{B}'$. L'écriture précédente nous donne l'égalité d'endomorphisme $h = -f + Id_E$ et on a donc

- $h(e'_1) = -f(e'_1) + e'_1 = e'_1$;
- $h(e'_2) = -f(e'_2) + e'_2 = -e'_1 + e'_2$;
- $h(e'_3) = -f(e'_3) + e'_3 = -e'_2 + e'_3$.

On en déduit donc que la matrice de h dans la base $\mathcal{B}'$ est

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) M' est une matrice triangulaire supérieur dont tout les coefficients de la diagonale sont tous non nuls, on en déduit donc qu'il s'agit d'une matrice inversible. On a alors que l'endomorphisme associée h est bijectif, donc sa matrice dans n'importe quelle base est également inversible et donc, pour la base canonique, que M est inversible.

(d) On observe que $M - I = -A + I - I = -A$ donc $(M-I)^3 = (-A)^3 = -A^3 = 0_3$.
Développons à présent $(M-I)^3$:

$$\begin{aligned}(M-I)^3 &= (M-I)(M-I)(M-I) = (M^2 - MI - IM + I^2)(M-I)\\ &= (M^2 - 2M + I)(M-I) = M^3 - M^2I - 2M^2 + 2MI + IM - I^2\\ &= M^3 - 3M^2 + 3M - I\end{aligned}$$

On a donc $M^3 - 3M^2 + 3M - I = 0_3 \Leftrightarrow M(M^2 - 3M + 3I) = I$. On en déduit donc de nouveau que M est inversible et l'on a

$$M^{-1} = M^2 - 3M + 3I.$$

(e) On observe dans un premier temps que pour tout entier $k \geq 3$, on a $A^k = A^3 A^{k-3} = 0_3 A^{k-3} = 0_3$ par la première question.
Comme $-A$ et I commutent car la matrice identité commute avec toutes matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on peut utiliser le binôme de Newton et l'on a pour tout entier $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}M^n = (-A+I)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-A)^k I^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k A^k\\ &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} (-1)^k A^k \text{ par nullité de } A^k \text{ pour } k \geq 3\\ &= \binom{n}{0} I + \binom{n}{1}(-1)A + \binom{n}{2}(-1)^2 A^2\\ &= I - nA + \frac{n(n-1)}{2} A^2\end{aligned}$$

Il nous reste à vérifier cette formule pour $n = 0$ et $n = 1$:

- $I - 0.A + \frac{0(-1)}{2} A^2 = I = M^0$
- $I - 1.A + \frac{1(1-1)}{2} A^2 = I - A = M$

On a donc bien pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M^n = I - nA + \frac{n(n-1)}{2} A^2.$$

Pour $n = -1$, on a $I - (-1)A + \frac{-1(-1-1)}{2} A^2 = I + A + A^2$ et

$$\begin{aligned}M^{-1} &= M^2 - 3M + 3I = (-A+I)^2 - 3(-A+I) + 3I\\ &= A^2 - A - A + I + 3A - 3I + 3I = A^2 + A + I.\end{aligned}$$

La formule est donc également vraie pour $n = -1$.

Partie B

Dans cette partie, on veut montrer qu'il n'existe aucun endomorphisme g de E vérifiant $g \circ g = f$. On suppose donc par l'absurde qu'il existe une matrice V carrée d'ordre 3 telle que :

$$V^2 = T.$$

On note g l'endomorphisme dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}'$ est V.

1. Montrer que $VT = TV$. En déduire que $g \circ f = f \circ g$.
2. (a) Montrer que $g(e'_1)$ appartient au noyau de f.
   En déduire qu'il existe un réel a tel que $g(e'_1) = ae'_1$.

   (b) Montrer que $g(e'_2) - ae'_2$ appartient au noyau de f.
   En déduire qu'il existe un réel b tel que $g(e'_2) = be'_1 + ae'_2$.

   (c) Montrer que : $f \circ g(e'_3) = g \circ f(e'_3) = ae'_2 + be'_1$.
   En déduire que $g(e'_3) - ae'_3 - be'_2$ appartient au noyau de f.

   (d) En déduire qu'il existe un réel c tel que : $V = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.
3. Calculer V^2 en fonction de a, b et c, puis en utilisant l'hypothèse $V^2 = T$, obtenir une contradiction.

1. On observe que $VT = V.V^2 = V^3 = V^2V = TV$ grâce à notre hypothèse donc si l'on transpose cette égalité matricielle en égalité d'endomorphisme, nous avons $g \circ f = f \circ g$.
2. (a) Montrer que $g(e'_1)$ est un vecteur de $\ker(f)$ revient à montrer que $f(g(e'_1)) = 0_E$ or

   $$f(g(e'_1)) = (f \circ g)(e'_1) = (g \circ f)(e'_1) = g(f(e'_1)) = g(0_E) = 0_E.$$

   On a donc bien $g(e'_1) \in \ker(f)$.
   Comme $\ker(f) = Vect(e'_1)$, $g(e'_1)$ est colinéaire à e'_1, autrement dit, il existe un réel a tel que $g(e'_1) = ae'_1$.

   (b) De même, on a

   $$f(g(e'_2) - ae'_2) = f(g(e'_2)) - af(e'_2) = g(f(e'_2)) - ae'_1 = g(e'_1) - ae'_1 = ae'_1 - ae'_1 = 0_E.$$

   On a donc bien $g(e'_2) - ae'_2 \in \ker(f)$.
   Comme $\ker(f) = Vect(e'_1)$, il existe un réel b tel que $g(e'_2) - ae'_2 = be'_1$ soit

   $$g(e'_2) = ae'_2 + be'_1.$$

   (c) Comme g et f commutent, on a automatiquement $f \circ g(e'_3) = g \circ f(e'_3)$ et de plus

   $$f \circ g(e'_3) = g \circ f(e'_3) = g(e'_2) = ae'_2 + be'_1.$$

   On a ainsi :

   $$f(g(e'_3) - ae'_3 - be'_2) = f(g(e'_3)) - af(e'_3) - bf(e'_2) = ae'_2 + be'_1 - ae'_2 - be'_1 = 0_E.$$

   On a donc bien $g(e'_3) - ae'_3 - be'_2 \in \ker(f)$.

(d) Il existe donc un réel c tel que $g(e'_3) - ae'_3 - be'_2 = ce'_1$ et donc

$$g(e'_3) = ce'_1 + be'_2 + ae'_1.$$

On a trouvé dans les questions précédentes

$$\begin{array}{l} g(e'_1) = ae'_1 \\ g(e'_2) = ae'_2 + be'_1 \\ g(e'_3) = ce'_1 + be'_2 + ae'_1 \end{array}.$$

On en déduit que la matrice de g dans la base $\mathcal{B}'$ est

$$V = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

3. On a

$$V^2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & 2ac + b^2 \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}.$$

Comme nous avons supposé que $V^2 = T$, le calcul précédent, nous donne que a, b et c vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} a^2 = 0 \\ 2ab = 1 \\ b^2 + 2ac = 0 \end{cases}$$

On observe que la première et la troisième équations impliquent au $a = b = 0$ ce qui nous donnerait dans la deuxième que $0 = 1$ ce qui est absurde. Notre hypothèse $V^2 = T$ est donc fausse et il n'existe aucun endomorphisme g de E vérifiant $g \circ g = f$.