TD 07 - Applications linéaires et endomorphismes

▷ **Exercice 1 :** Montrer que les applications suivantes sont des applications linéaires.

1. L'application $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :
$$\forall (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \quad f((x,y,z,t)) = \begin{pmatrix} 2x-t & y+t \\ 3x+z & 0 \end{pmatrix}.$$
2. L'application h définie sur $\mathbb{R}_2[x]$ par
$$\forall P \in \mathbb{R}_2[x], \forall x \in \mathbb{R}, \quad h(P)(x) = xP(x+1) - (x+1)P(x).$$
3. L'application g définie sur $\mathbb{R}_2[x]$ par
$$\forall P \in \mathbb{R}_2[x], \forall x \in \mathbb{R}, \quad g(P)(x) = x^2P'(x) - 2xP(x).$$
4. L'application ψ définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par
$$\forall X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \quad \psi(X) = AX - XB$$
où $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

▷ **Exercice 2 :** On considère l'application
$$f \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+3y+3z, y, x-3y-z) \end{array}.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. Calculer f^2 et f^3.
3. Calculer $g : (x,y,z) \mapsto f^3((x,y,z)) - f^2((x,y,z) - 4f((x,y,z))$.
4. En déduire que f est un automorphisme et déterminer f^{-1}.

▷ **Exercice 3 :**

1. Calculer les noyaux des applications linéaires de l'exercice 1.
2. Par le théorème du rang déterminer la dimension des images de chacune des applications linéaires précédentes.
3. Déterminer les images.

▷ **Exercice 4 :** Soit $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \mathbb{R}^2$. On considère :
$$H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = y = z = t\}.$$
Peut-on trouver une application linéaire de E dans F dont H est le noyau ?

▷ **Exercice 5 :** Déterminer les matrices dans les bases canoniques de chacune des applications linéaires de l'exercice 1.

▷ **Exercice 6 :** Soit $f \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (2x-3y, x) \end{array}$ et soit $g = \pi Id_{\mathbb{R}^2}$. On admet que f et g sont des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$.

1. Donner la matrice de f et g dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. Donner la matrice de f et g dans la base $\mathcal{B} = \{(1,1),(1,-1)\}$.

▷ **Exercice 7 :** On considère $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ une base de $\mathbb{R}^4$ et f l'application linéaire définie par

- $f(e_1) = -e_2 + e_3 - e_4$
- $f(e_2) = e_1 - e_2 + e_3$
- $f(e_3) = e_1 + e_4$
- $f(e_4) = e_2 - e_3 + e_4$

1. (a) Calculer pour tout $k \in [\![1, 4]\!]$, $(f \circ f)(e_k)$.
   (b) Identifier $f \circ f$.
2. (a) Donner la matrice de f dans la base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$
   (b) Identifier $f \circ f$.
3. En déduire que $Im(f) \subset \ker(f)$.
4. Calculer $\ker(f)$.
5. En déduire $Im(f)$.

▷ **Exercice 8 :** Pour chaque matrice déterminer le noyau, l'image de l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ qu'elle représente dans la base canonique. Si l'application associée est inversible, on calculera également sa bijection réciproque.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
4. $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

▷ **Exercice 9 :** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $B = A - I_3$.

1. Déterminer l'endomorphisme f de $\mathbb{R}_2[x]$ dont la matrice dans la base canonique est A.
2. Calculer B^2 et B^3. En déduire B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Pour tout entier naturel n, calculer $(B + I_3)^n$.
4. En déduire f^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

▷ **Exercice 10 :**

1. Déterminer la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ dans la base $\mathcal{B} = \{(1, 1), (1, -1)\}$.
2. Retrouver les matrices des endomorphismes f et g dans la base $\mathcal{B}$ de l'exercice 6 à partir de celle dans la base canonique.

▷ **Exercice 11 :** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. On considère l'application φ définie par :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M &\longmapsto AM - MA. \end{aligned}$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Écrire la matrice C de φ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Déterminer le noyau de φ à l'aide de la matrice C. En déduire $\mathrm{rg}(\varphi)$.
4. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des matrices qui commutent avec A, c'est-à-dire l'ensemble des matrices M telles que $AM = MA$.
   (a) Montrer que $\mathcal{C}$ est un espace vectoriel.
   (b) Déterminer une base de $\mathcal{C}$.

▷ **Exercice 12 :** Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$ est

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le noyau et l'image de f.
2. (a) Montrer que la famille (x, x^2+1, x^2-1) est une base $\mathbb{R}_2[x]$.
   (b) Déterminer la matrice M' de f dans cette base.
   (c) Déterminer une matrice P telle que $M' = P^{-1}MP$.

▷ **Exercice 13 :** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et ψ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A.

1. Déterminer le rang de ψ. Est-ce un automorphisme ?
2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $\psi((x, y, z))$.
3. On note $u = (1, -1, 0)$, $v = (0, 1, -1)$ et $w = (1, 1, 1)$.
   (a) Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer $\psi(u)$, $\psi(v)$ et $\psi(w)$. En déduire la matrice de ψ dans la base (u, v, w).
   (c) En déduire que A est semblable à une matrice diagonale D que l'on précisera et donner une matrice inversible P telle que $D = P^{-1}AP$.
4. Avec la matrice D, déterminer une base de $\ker(\psi)$ et une base de $\mathrm{Im}(\psi)$.